609791

NUOVE ISTITUZIONI

DI

ARITMETICA PRATICA E TEORETICA

DI

GIACOMO SCHETTINI

Scritti per i Corsi Ginnasiali ed Elementari.

2.ª Edizione.

NAPOLI
TIPOGRAFIA DI SAVERIO GIORDANO
Vico Sansevero a S. Domenico Maggiore 15 e 16.
1867

Digitized by Google

PREFAZIONE

Nel dare a stampa per la seconda volta questi elementi di aritmetica è stato nostro primo pensiero di renderli atti, per quanto più si è da noi potuto all' intelligenza dei giovanetti; essendoci guida la lunga esperienza che abbiamo nell' insegnamento.

Facciamo intanto osservare che essi non solo sono scritti per le scuole ginnasiali, ma anche per le scuole elementari; perchè il metodo da noi tenuto si è di enunciare prima un teorema, ovvero la regola che insegna a risolvere un problema, indi ne facciamo l' applicazione ad un esempio, ed infine ne diamo la dimostrazione.

Così la nostra aritmetica serve egualmente bene al pratico ed al teoretico, il pratico si arresta quando incontra le tre lettere iniziali della parola *dimostrazione*; il teoretico procede per conoscere la ragione di ciò che la regola prescrive, o l' enunciato di un teorema asserisce.

E però l'insegnante nelle scuole elementari farà imparare ai giovanetti le sole regole pratiche e le farà applicare agli

Digitized by Google

esempi, tralasciando le dimostrazioni; ma quando vedrà che le ragioni delle cose sono facili e brevi, ne profitterà, e le spiegherà ai giovanetti dispensandoli, se crede, dall'obbligo di ripeterle in iscuola nella seguente lezione; perchè il solo sentire e capire le ragioni delle cose, reca nell' animo degli allievi una certa soddisfazione, che invoglia a studiare.

Per più agevolare coloro che apprendono la sola aritmetica pratica, si sono segnati nell' indice con un asterisco quegli articoli che dai medesimi debbonsi tralasciare. Abbiamo poi distinti con carattere minuto taluni paragrafi che possono omettersi dagli alunni in un primo corso di studio; perchè trattano di cose che non sogliono esporsi in un pubblico esame. Col medesimo carattere si sono scritti gli enunciati dei problemi che si propongono a risolvere; ma non perciò la loro soluzione si deve tralasciare, anzi si deve porre ogni cura a risolverli.

Infine facciamo osservare che il presente libro differisce dal nostro corso esteso di aritmetica, di cui ne abbiamo fatta la quinta edizione; perchè nel corso esteso trovasi la teoria delle progressioni e dei logaritmi con le applicazioni alle questioni d' interesse composto ed altri problemi, non che la teoria delle approssimazioni numeriche, la regola del falso, la descrizione del regolo calcolatore, ed altre conoscenze relative alla scienza dei numeri, le quali non potrebbero aver luogo in un libro di corso ginnasiale; ma conviene che si studiassero da coloro che vogliono approfondirsi nella scienza del calcolo.

Digitized by Google

CAP. I.

Nozioni preliminari. — Numerazione.

1. Si chiama *grandezza* o *quantità* tutto ciò che si riguarda come capace di aumento o diminuzione, e di cui se ne può concepire il doppio, il triplo, ec. ovvero la metà, la terza parte, ec. (*).

2. La grandezza si distingue in *continua* e *discreta*.

La *grandezza continua* è quella che si manifesta come un sol tutto senza distinzione o interruzione di parti. Tal'è, per esempio, una linea, una superficie, un corpo (**).

La *grandezza discreta* è quella che si manifesta come una collezione di parti o di cose simili distinte l'una dall'altra. Tal'è per esempio una collezione di libri, di uccelli, di alberi.

3. Le grandezze, sieno esse continue o discrete, si distinguono in *omogenee* ed *eterogenee*.

Due grandezze diconsi *omogenee* o *della stessa natura* quando sono paragonabili fra loro, in maniera da potersi dire

---

(*) Vale a dire, una cosa prende il nome di *grandezza* quando si considera sotto il punto di veduta di essere maggiore o minore di un' altra; e quando se ne può concepire il doppio, il triplo, ec. ovvero la metà, il terzo, ec. E però quantunque vi sia la maggiore o minore bellezza, il colore più o meno rosso, più o meno bianco, ec.; pure non potendosi concepire una bellezza doppia, tripla, ec. di un' altra, nè un rosso doppio, triplo, ec. di un altro, non annoveriamo la bellezza ed il colore fra le grandezze matematiche, le quali sono solamente quelle che si possono sottoporre a calcolo, ossia quelle, il cui valore rispetto ad un' altra grandezza presa per unità, viene espresso da un numero.

(**) Sarà cura del maestro di far capire agli allievi che cosa sieno le linee, le superficie, ed i corpi; dicendosi *corpo* ciò che ha lunghezza, larghezza, e profondità; e dicesi *superficie* ciò che ha lunghezza e larghez-

che una è maggiore, minore, o eguale all' altra. Quando ciò non avviene diconsi *eterogenee*.

Così, per esempio, le linee sono omogenee con le linee, le superficie con le superficie, i pesi con i pesi. Ma le linee sono eterogenee tanto con le superficie quanto con i pesi, ed i pesi con le superficie: difatto, non può istituirsi paragone di maggioranza o minoranza fra linea e superficie, fra linea e peso, e fra superficie e peso.

4. *Misurare* una grandezza vuol dire paragonarla ad un'altra della stessa natura che si prende per *unità*, per vedere quante volte contiene quest' unità, o quante parti contiene dell' unità. Dunque:

L' *unità* è quella grandezza che si prende per termine di paragone quando se ne misura un'altra.

Così, per esempio, allorchè si vuol misurare la lunghezza di un panno per vedere quanti metri essa sia, si paragona ad un' altra lunghezza chiamata metro che si prende per unità, e trovandosi che contiene giusto cinque metri, si dirà che la lunghezza del panno è cinque metri.

Similmente, se si vuole misurare il peso di una palla di ferro per vedere quante libbre essa sia, si paragona ad un altro peso chiamato libbra, che si prende per unità; e trovandosi p. es. eguale a quattro libbre ed un terzo di libbra, si dirà che il peso della palla è quattro libbre ed un terzo.

5. Il *numero* è la riunione delle unità o parti dell' unità che sono contenute in una grandezza.

Dunque il numero esprime la misura di una grandezza.

---

za solamente, e la *linea* è ciò che ha solo lunghezza. Si prenderà un esempio che cada sotto i sensi degli allievi, come una tavola; e si dirà che la tavola è un corpo, perchè ha lunghezza, larghezza, e profondità o grossezza; la faccia poi della tavola è una superficie, perchè ha solamente lunghezza e larghezza, cioè si estende in due soli sensi; il limite o termine della faccia, ossia della superficie, è una linea, perchè ha solamente lunghezza.

Digitized by Google

Così p. es. quando si dice *otto* lire, *sette* litri, *dieci* ore; i numeri otto, sette, dieci, esprimono rispettivamente la misura della quantità di danaro che è eguale ad otto lire, la misura della capienza di un vase che è sette litri, la misura di un tempo che è dieci ore.

6. Si dice numero *intero* quello che esprime una o più unità senza parti di essa. Si dice poi numero *fratto* quello che esprime parti dell' unità.

7. I numeri si distinguono in *astratti* e *concreti*.

Si dice *numero astratto* quello che si enuncia senza denominare la specie delle sue unità. Così p. es. dicendosi *nove*, *quattro*, *dieci*, questi numeri sono astratti.

Si dice *numero concreto* quello in cui si denomina la specie delle sue unità. Tali sono i numeri *cinque miglia*, *sei uomini*, *otto giorni*, dove è denominata la specie delle loro unità, la quale nel primo numero è il miglio, nel secondo è l' uomo, e nel terzo è il giorno.

8. I numeri concreti possono essere *omogenei* ed *eterogenei*.

Diconsi *omogenei* quando esprimono cose della stessa natura, ed *eterogenei* quando esprimono cose di natura diversa.

Così *due* lire, *cinque* lire, *sette* lire sono tre numeri omogenei, perchè tutti esprimono lire che sono cose della medesima natura; ma *due* miglia, *cinque* colonne, *sette* soldati sono tre numeri eterogenei, perchè le miglia, le colonne, ed i soldati sono cose di natura diversa.

9. La *Matematica* è quella scienza che ha per oggetto la grandezza.

Quel ramo delle matematiche che tratta della grandezza continua si chiama *Geometria*.

Quel ramo delle matematiche che tratta della grandezza discreta, servendosi di simboli generali per indicare le grandezze, si dice *Algebra*.

Quella parte delle matematiche che si occupa dei numeri

si chiama *Aritmetica.* L' Aritmetica dunque è la scienza dei numeri.

Diamo qui la spiegazione di alcuni vocaboli che spesso si usano dai matematici.

10. Dicesi *assioma* una verità evidente per sè stessa; cioè tale che per potersi capire non vi è bisogno di alcun ragionamento.

11. Si chiama *teorema* una verità che non è chiara per sè stessa come l'assioma, ma diviene evidente in forza di un ragionamento che dicesi *dimostrazione.*

12. Si chiama *problema* una questione che si propone a risolvere. Il procedimento che si tiene per isciogliere la questione si dice *soluzione* del problema.

13. Dicesi *corollario* una conseguenza che si ricava, o dopo la dimostrazione di un teorema, o dopo la soluzione di un problema.

14. Si dice *scolio* un'osservazione che si pospone alla dimostrazione di un teorema, o alla soluzione di un problema.

15. La Matematica poggia i suoi ragionamenti su taluni principii evidenti per sè stessi, cioè sugli assiomi: questi sono i seguenti.

I. Il tutto è maggiore di ciascuna sua parte, ed è uguale all' insieme di tutte le parti nelle quali è stato diviso.

II. Le quantità uguali ad una terza sono uguali fra loro.

III. Due quantità che sono doppie, triple, ec. ovvero, metà terza parte, ec. di quantità uguali, sono eguali fra loro.

IV. Se a quantità eguali si aggiungono o si tolgono quantità uguali, quelle che ne risultano sono uguali fra loro.

Numerazione.

16. La *numerazione* è l' arte di nominare e scrivere tutti i numeri possibili.

Si dice *numerazione parlata* quella che tratta del modo di nominare i numeri.

Si dice *numerazione scritta* quella che tratta, del modo di scrivere i numeri.

I numeri si formano con aggiungere un'unità ad un'altra unità, e poi all'insieme di queste prime unità si aggiunge un'altra unità, e così successivamente si hanno numeri di più in più grandi; da ciò segue che i numeri sono *infiniti*, perchè niente impedisce di aggiungere altre unità ad un numero per quanto grande esso sia.

NUMERAZIONE PARLATA.

17. Per nominare con pochi vocaboli tutti i numeri possibili, essi si sono composti di diversi ordini di unità, cioè di unità di prim'ordine, di second'ordine, di terz'ordine, ec.

Le unità di prim'ordine, diconsi anche *unità semplici*, ed hanno i seguenti nomi.

L'*unità* si dice anche *uno*. La riunione di uno più uno si dice *due*. La riunione di due più uno, si dice *tre*. La riunione di tre più uno si dice *quattro*. Similmente seguitando si hanno i numeri *cinque*, *sei*, *sette*, *otto*, *nove*.

La riunione di nove più uno si chiama *dieci*, ovvero *decina*. La decina è un'unità di second'ordine.

Si conta per decine come si conta per unità semplici, dicendosi una decina, due decine, tre decine, ec. E siccome con dieci unità di prim'ordine abbiamo formato un'unità di second'ordine, così con dieci unità di second'ordine formeremo un'unità di terz'ordine, e con dieci di terzo, ne formeremo una di quarto, ec.

Per brevità di linguaggio, invece di dire due decine, tre, decine, quattro decine, ec. sino a nove decine, si dice *venti*, *trenta*, *quaranta*, *cinquanta*, *sessanta*, *settanta*, *ottanta*, *novanta*.

I numeri formati da una decina ed un'unità, da una decina e due unità, da una decina e tre unità, ec. sino a nove

unità, diconsi rispettivamente *undici*, *dodici*, *tredici*, *quattordici*, *quindici*, *sedici*, *diciassette*, *diciotto*, *diciannove*.

I numeri composti di decine ed unità, eccetto quelli fra dieci e diciassette, si pronunziano aggiungendo al numero delle decine quello delle unità che vi sono dippiù. Così p. es. il numero composto di due decine e cinque unità si pronunzia *venticinque*. Similmente il numero composto di sette decine e quattro unità si pronunzia *settantaquattro*.

Una collezione di dieci decine si chiama *cento*, ovvero *centinaio*. Il centinaio è un' unità di terz' ordine.

Si conta per centinaia come si conta per decine e per unità, dicendosi: *un centinaio* ovvero *cento*, *due centinaia* ovvero *duecento*, *tre centinaia* ovvero *trecento*, e così di seguito sino a *nove centinaia* ovvero *novecento*.

I numeri composti di centinaia, decine, ed unità, si pronunziano aggiungendo al numero delle centinaia quello delle decine e delle unità che vi sono di più. Così p. es. un numero che contiene tre centinaia, quattro decine, e due unità, si pronunzia *trecentoquarantadue*.

Una collezione di dieci centinaia si chiama *mille* ovvero *migliaio*. Il migliaio è un' unità di quart' ordine.

Si conta per migliaia come si conta per centinaia, decine, ed unità.

L'unione di dieci migliaia non ha nome particolare, perciò si chiama *decina di migliaia*. Essa è un'unità di quint'ordine.

L' unione di dieci decine di migliaia, la quale forma un centinaio di migliaia, nè anche ha nome particolare, perciò si chiama *centinaio di migliaia*. Essa è un' unità di sest' ordine.

L' unione di dieci centinaia di migliaia, ossia di mille migliaia, si chiama *milione*. Il milione è un' unità di settim' ordine.

Dai milioni in poi si cambia nome di tre in tre ordini di unità: questi nomi sono i seguenti.

Digitized by Google

Le unità di migliaia di milioni diconsi *bilioni o milliardi*; le unità di migliaia di bilioni diconsi *trilioni;* le unità di migliaia di trilioni diconsi *quadrilioni*, e così di seguito.

Dunque *mille migliaia fanno un milione*, *mille milioni fanno un bilione*, *mille bilioni fanno un trilione*, ec. (*).

18. Raccapitolando quanto si è detto ne segue che:

Un numero si decompone in diversi ordini di unità, che cominciando dalle unità semplici, cioè da quelle del *primo ordine*, e salendo a quelle degli ordini *superiori*, sono

1° ordine — unità semplici,
2° ordine — unità di decine,
3° ordine — unità di centinaia,
4° ordine — unità di migliaia,
5° ordine — unità di decine di migliaia,
6° ordine — unità di centinaia di migliaia,
7° ordine — unità di milioni,
8° ordine — unità di decine di milioni,
9° ordine — unità di centinaia di milioni,
10° ordine — unità di bilioni,
11° ordine — unità di decine di bilioni,
ec.

Questi ordini si aggruppano a tre a tre, cioè in ternarii, che sono

Unità, decine, e centinaia semplici.

Unità di migliaia, decine di migliaia, e centinaia di migliaia.

Unità di milioni, decine di milioni, e centinaia di milioni.

(*) Dunque i vocaboli con cui si nominano tutti i numeri possibili si riducono a tredici, e questi sono i nomi dei primi dieci numeri insieme ai nomi *venti, cento, mille;* mentre quelli di tutti gli altri numeri si compongono dei tredici accennati con qualche varietà di desinenza in *enta* o in *anta* o in *one*.

Digitized by Google

Unità di bilioni, decine di bilioni, e centinaia di bilioni. Similmente si prosegue per i ternarii di ordine superiore.

19. Un numero si enuncia pronunziando prima le unità dell' ordine più alto, e poi quelle degli ordini che sono di dieci in dieci volte minori.

Così p. es. dovendosi enunciare il numero che contiene tre unità, cinque decine, e sette centinaia, si comincia da quelle dell' ordine più elevato, e si dirà: *settecentocinquantatre.*

NUMERAZIONE SCRITTA.

20. Si è cercato di scrivere tutti i numeri possibili per mezzo di pochi segni che diconsi *cifre*, ovvero *caratteri* o *figure.*

I nove primi numeri si rappresentano generalmente con le seguenti cifre, che veggonsi scritte sotto il numero rispettivo.

uno	due	tre	quattro	cinque	sei	sette	otto	nove
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Con queste cifre si possono rappresentare tutti i numeri possibili, perchè essendo il numero composto di più ordini di unità, ed ogni ordine non avendo più di nove unità, una delle dette cifre può rappresentare tutte le unità di quell'ordine; ma bisogna scriverle in modo che si distingua l' ordine di unità che la cifra rappresenta.

Si è convenuto di scrivere nel primo posto le unità semplici, e procedendo verso sinistra, nel secondo posto si scrivono le unità di decine, nel terzo le unità di centinaia, nel quarto le unità di migliaia, e così continuando si scrivono le unità degli ordini che sono di dieci in dieci volte più grandi, seguendo la stessa legge della numerazione parlata.

Se il numero non avesse unità di qualche ordine, il posto dove mancano le unità di quell' ordine si fa occupare dalla cifra *0* detta *zero.* Perciò lo zero non ha valore, ma serve solo ad occupare il luogo di quell'ordine di unità che manca in un numero.

Dunque le cifre che bastano a rappresentare qualunque numero sono dieci, cioè le nove che rappresentano i nove primi numeri, le quali diconsi cifre *significative*, e la cifra *zero* che non ha alcun valore.

MANIERA DI SCRIVERE I NUMERI.

21. Si scrive prima la cifra che denota le unità dell' ordine più alto, e poi procedendo verso dritta, si scriveranno quelle che denotano le unità degli ordini di dieci in dieci volte minori, ponendo lo zero dove mancano le unità di qualche ordine.

Questa è la regola generale, non pertanto, per agevolare la scrittura dei numeri sotto la dettatura, passiamo ai casi pratici.

Allorchè il numero non ha più di tre cifre, cioè centinaia, decine, ed unità, come il numero *cinquecentoventotto*, si scrivono prima le 5 centinaia, poi le 2 decine, ed infine le 8 unità, e si avrà il numero scritto così 528.

Se non avesse decine come il numero *ottocentosei*, si mette un zero nel posto delle decine, e si avrà il numero scritto così 806.

Se non avesse nè decine, nè unità, come il numero cinquecento, si pongono due zeri nel luogo delle decine ed unità, e si avrà il numero scritto così 500.

Allorchè il numero ha più di tre cifre, si tiene presente che le sue cifre nel discendere da quella dell' ordine più alto agli ordini inferiori si distinguono in gruppi a tre a tre; Così p. es. se il numero comincia dalle unità di bilioni,

dopo queste unità ci vogliono tre cifre per arrivare alle unità di milioni, e poi altre tre per arrivare alle unità di migliaia, ed infine altre tre per arrivare alle unità semplici.

Con questa avvertenza si rende facile scrivere un numero qualunque. Sia p. es. da scriversi il numero ***25 trilioni*, *56 milioni*, *trentaduemila e quindici***. Si scrive prima 25 che dinota i trilioni; e siccome dai trilioni per arrivare ai bilioni ci vogliono tre cifre, e non vi sono nè centinaia, nè decine, nè unità di bilioni, si pongono tre zeri, e si avrà il numero sino ai bilioni scritto così 25000; e siccome dai bilioni per arrivare ai milioni ci bisognano altre tre cifre, ed il gruppo dei milioni ne ha due sole, perchè sono 56 milioni, si pone prima un zero e poi 56, e si avrà il numero sino ai milioni scritto così 25000056; e poichè dai milioni sino alle migliaia ci vogliono altre tre cifre, ed il gruppo delle migliaia le tiene tutte tre, perchè ha 302 migliaia, si pone 302 appresso alle cifre già scritte, e si ha il numero sino alle migliaia scritto così 2500056302; e poichè dalle migliaia sino alle unità ci vogliono altre tre cifre; ed il gruppo delle unità ne ha due sole, perchè sono 15 unità, si scrive prima un zero, e poi si scrive 15 affianco alle cifre già scritte, e così si ha il numero proposto scritto interamente, e sarà 25000056302015.

MANIERA DI LEGGERE UN NUMERO.

22. Se il numero non ha più di tre cifre, la prima a dritta dinotando unità, la seconda decine, e la terza centinaia, si leggerà pronunciando prima le centinaia, poi le decine, e infine le unità. Così p. es. il numero 538 si legge *cinquecentotrentotto*.

Se il numero ha più di tre cifre, queste si separano a tre a tre con virgole, procedendo da dritta verso sinistra; e siccome il primo gruppo rappresenta unità, decine, e centinaia semplici; il secondo rappresenta unità, decine e centina-

ia di migliaia; il terzo rappresenta unità decine e centinaia di milioni, ec. si leggerà il numero procedendo da sinistra verso dritta, leggendo ciascun gruppo come se fosse solo; ma dopo letto si pronuncierà l'ordine di unità che gli compete; cioè di unità semplici, di unità di migliaia, di unità di milioni, ec. secondo che è il primo gruppo a dritta, o il secondo, o il terzo, ec.

Per agevolare la lettura di un numero quando esso tiene molte cifre, non solo le cifre si separano in gruppi ternarii con virgole, ma si pone la caratteristica 1 sulla prima cifra a dritta del terzo gruppo che dinota milioni, e la caratteristica 2 sulla prima cifra a dritta del quarto gruppo che dinota bilioni, e così di seguito. Così, per esempio, il numero 5864302617250219 diviso in gruppi, e ponendovi le caratteristiche nel modo anzidetto, diverrà

$$\overset{4}{5},86\overset{3}{4},30\overset{2}{2},61\overset{1}{7},250,219.$$

e si leggerà: *cinque quadrilioni, ottocentosessantaquattro trilioni, trecentodue bilioni, seicentodiciassette milioni, dugentocinquanta mila, duecentodiciannove.*

Osserviamo inoltre che un numero non solo si può leggere nel modo ordinario che abbiamo stabilito, ma possono leggersi le sue cifre ad una ad una, a due a due, a tre a tre, ec. Così p. es. avendovi il numero 738465, leggendo le sue cifre a due a due, si dirà: *73 decine di migliaia*, *84 centinaia*, *65 unità*; e leggendole a tre a tre, si dirà: *738 migliaia*, *465 unità*; e leggendole a quattro a quattro, si dirà: *7384 centinaia*, *65 unità*. (*).

(*) Ci siamo uniformati alla nomenclatura che ora generalmente si usa; ma conviene conoscere che la nomenclatura che prima si usava in Italia, dalle migliaia di milioni in sopra era diversa; perchè i milioni di milioni si chiamavano *bilioni*, ed i milioni di bilioni si chiamavano *trilioni*, e così di seguito. Perciò i bilioni erano unità di tredicesimo ordine, i trilioni erano unità di diciannovesimo ordine, ec. Con l'antica

Digitized by Google

SISTEMA DI NUMERAZIONE.

25. Il *sistema di numerazione* consiste nella convenzione fatta di formare i numeri in modo che si compongano di diversi ordini di unità, ciascuna delle quali è un determinato numero di volte maggiore dell' unità dell' ordine inferiore.

Quel numero che denota quante volte l' unità di un ordine è maggiore dell' unità dell' ordine immediatamente inferiore si chiama *base* del sistema di numerazione.

La base del nostro sistema di numerazione è il numero *dieci*, perchè in questo sistema l' unità di un ordine è dieci volte maggiore dell' unità dell' ordine immediatamente inferiore (*).

Potrebbero formarsi infiniti sistemi di numerazione, perchè, invece di prendere per base *dieci*, si potrebbe prendere per base un numero qualunque.

Nel nostro sistema di numerazione le unità rappresentate da una cifra sono dieci volte maggiori di quelle rappresentate dalla cifra a dritta, e cento volte maggiori di quelle rappresentate dalla cifra che è due posti a dritta, e mille volte maggiori di quelle rappresentate dalla cifra che è tre posti a dritta, e così di seguito.

---

nomenclatura volendosi leggere il numero 5864302617250219, si sarebbero poste le caratteristiche nel seguende modo

$$5,86\overset{2}{4},302,61\overset{1}{7},250,219,$$

e si sarebbe letto *cinquemila ottocento sessantaquattro bilioni, trecento duemila seicento dieiassette milioni, duecentocinquantamila duecento diciannove.*

(*) Le dieci dita delle nostre mani hanno dovuto certamente dare origine alla base *dieci*, perchè naturalmente esse ci servono di aiuto a contare; e quando si è giunto a dieci, conviene che di nuovo si alzino le dita per contare al di là di dieci.

CAP. II.

Le quattro operazioni principali su i numeri interi.

24. Si chiama operazione di *calcolo* qualunque operazione di composizione o decomposizione che si farà su di uno o più numeri per trovare altri numeri.

Quattro sono le *operazioni principali* o *fondamentali* di calcolo o dell' aritmetica; esse sono l' *addizione*, la *sottrazione*, la *moltiplicazione* e la *divisione*, di cui parleremo successivamente in questo capitolo.

ADDIZIONE DEI NUMERI INTERI.

25. L' *addizione* è quella operazione aritmetica, che ha per fine di riunire più numeri in un solo, il quale chiamasi *somma*.

26. Per indicare che più numeri debbono addizionarsi fra loro, si è convenuto far uso del segno $+$, che si pronunzia *più*, e si scrive fra l' uno e l' altro de' numeri da addizionarsi. Così, per esempio, volendo indicare che 5 deve addizionarsi con 4, si scrive $5+4$, e si legge *5 più 4*. Come pure per indicare che debbono addizionarsi i numeri 7, 3, e 6, si scriverà $7+3+6$.

Volendo indicare che due numeri o due qualsiansi quantità sono eguali, si fa uso del segno $=$, che si pronuncia *uguale a*, e si scrive fra le due quantità che sono uguali, le quali si dice che costituiscono un' *eguaglianza*. Così p. es. per indicare che $5+4$ è uguale a 9, ovvero che $10+2$ è uguale a $7+5$, si scrive $5+4=9$, e $10+2=7+5$.

La quantità che sta a sinistra del segno uguale si dice *primo membro* dell' eguaglianza, e la quantità che sta a dritta si dice *secondo membro*.

Per addizionare i numeri di più cifre bisogna che si sap-

Digitized by Google

pia fare a mente l' addizione dei numeri di una cifra, che si dice *caso semplice* dell' addizione. Così, p. es. bisogna sapere che 8+6 fa 14, che 9+7 fa 16, che 7+8 fa 15, ec. combinando i numeri di una cifra a due a due fra loro in tutti i modi possibili. Noi dunque supponiamo che siasi già imparata questa addizione, e passiamo al caso generale.

27. *L' addizione dei numeri interi si fa scrivendoli l' uno sotto l' altro, in modo che le unità cadano sotto le unità, le decine sotto le decine, le centinaia sotto le centinaia, ec. e si tira una linea sotto l' ultimo numero per separarlo dalla somma; poi si addizionano i numeri contenuti in ciascuna colonna, cominciando dalla dritta; se la somma non supera 9, si scrive sotto la linea; ma se contiene decine, si scrivono le sole unità, e le decine si aggiungono alla colonna seguente; la somma poi dell' ultima colonna, si scrive tal quale si ottiene.*

Sieno p. es. da addizionarsi i numeri 6549, 5082, e 394.

Scriviamo i numeri dati in modo che le unità cadano sotto le unità, le decine sotto le decine, le centinaia sotto le centinaia, ec. come si vede quì a fianco.

$$\begin{array}{r} 6549 \\ 5082 \\ 394 \\ \hline 12025 \end{array}$$

Poi cominciamo dall'addizionare le loro unità, e si dirà: 9 unità più 2 unità fanno 11, più 4 unità fanno 15 unità; ma poichè 15 unità formano una decina e 5 unità, scriviamo sotto la linea le sole 5 unità, e la decina si ritiene per unirla alla colonna delle decine.

Indi passiamo ad addizionare le decine che sono nella seconda colonna, alle quali si aggiunge la decina ritenuta, e si dirà: una decina si porta, più 4 decine fanno 5 decine, più 8 fanno 13, più 9 fanno 22 decine; ma poichè 22 decine formano 2 centinaia e 2 decine, scriviamo le sole 2 decine nel posto delle decine, e le 2 centinaia si ritengono per unirle alla colonna delle centinaia.

Passiamo ora ad addizionare le centinaia che sono nella

terza colonna, alle quali si aggiungono le 2 centinaia ritenute, e si dirà: 2 centinaia che si portano, più 5 centinaia fanno 7, più 3 fanno 10 centinaia; ma poichè 10 centinaia formano un migliaio e zero centinaia, scriviamo zero nel posto delle centinaia, ed il migliaio si ritiene per unirlo alla colonna delle migliaia.

Finalmente si passa ad addizionare le migliaia che sono nella quarta colonna, alle quali si aggiunge il migliaio, e si dirà: 1 migliaio che si porta, più 6 migliaia fanno 7, più 5 fanno 12 migliaia, cioè 2 migliaia ed una decina di migliaia: si scriveranno al loro posto le 2 migliaia e la decina di migliaia, e si ottiene la somma cercata eguale a 12025.

In effetti, avendo unito insieme tutte le unità, tutte le decine, tutte le centinaia, e tutte le migliaia de' numeri dati, ed avendo trovato che formano 5 unità, 2 decine, zero centinaia, 2 migliaia, ed una decina di migliaia, ne segue che il numero 12025 il quale contiene tutte queste unità, decine, centinaia, migliaia, e decine di migliaia, sarà la loro somma.

Praticamente si dirà: 9 più 2, 11, più 4, 15, 5 e porto 1; 1 più 4, 5, più 8, 13, più 9, 22, 2 e porto 2; 2 più 5, 7, più 3, 10, zero e porto 1; 1 più 6, 7, più 5, 12.

28. Allorchè debbono addizionarsi molti numeri riesce più comodo, e difficilmente si va soggetto ad errori, facendo più addizioni parziali, e poi addizionando le diverse somme parziali ottenute.

Così p. es. se dovessero addizionarsi i numeri 3854, 7321, 7480, 9216, 532, 324, e 79, possiamo fare l' addizione in tre volte, come si scorge qui a fianco, dove abbiamo addizionati i primi tre numeri separatamente dagli ultimi quattro, e si sono avute le due somme 18655, e 10151. Poi si addizionano queste due somme, e si otterrà la somma totale 28806.

```
 3854
 7321
 7480
-----
 9216
  532
  324
   79
-----
18655
10151
-----
28806
```

Digitized by Google

PROVA DELL' ADDIZIONE.

29. Si chiama *prova* o *riprova* d'un'operazione aritmetica una seconda operazione, la quale si fa per verificare se la prima sia stata ben fatta.

La prova dell'addizione può farsi addizionando di nuovo i numeri dati da sotto in sopra; perchè le addizioni facendosi in un ordine inverso, difficilmente si può incorrere nel medesimo errore; perciò se si trova la stessa somma di prima è segno che l'operazione è stata ben fatta.

La prova dell'addizione può anche farsi per mezzo della sottrazione, come vedremo dopo che avremo imparata la sottrazione.

Esercizii.

I. Quanto durò la potenza romana dalla fondazione di Roma sino all'anno 800 dell'era volgare, epoca in cui Carlomagno fu incoronato imperatore da Leone III, conoscendosi che la sua prima età fu sotto sette Re per 244 anni, e la seconda fu sotto i Consoli per 470 anni, la terza sotto cinquantasette Imperatori per 503 anni dal primo Imperatore Augusto sino ad Augustolo che fu deposto da Odoacre Re degli Eruli, la quarta fu sotto questo Re e sotto otto Re Ostrogoti per 106 anni, e la quinta sotto ventidue Re Longobardi per 228 anni?

II. Qual'è la popolazione di tutta la terra, conoscendosi che, a un di presso, l'Europa contiene 312 milioni di abitanti, l'Asia ne contiene 765, l'Africa ne contiene 76, l'America settentrionale ne contiene 50, la Meridionale 22, e l'Oceania 30?

III. Qual'è la popolazione di tutta l'Italia, conoscendosi presso a poco quella de'suoi diversi stati prima delle annessioni, cioè, nelle due Sicilie 9120000 abitanti, nello stato Pontificio 2350000, nella Repubblica di S. Marino 7100, nel Granducato di Toscana 1790000, nel Ducato di Modena 578000, nel Ducato di Parma 464000, negli stati Sardi 4980000, nel Principato di Monaco 7200, nel regno Lombardo Veneto 4850000, nella Corsica o Italia francese 185000, in Malta o Italia inglese 102000, e nel Cantone del Ticino o Italia Svizzera 102000?

Digitized by Google

IV. Si sono fatti cinque distinti pagamenti ad un operaio in conto di lavori eseguiti; il primo è stato di lire 125, il secondo di 396, il terzo di 82, il quarto di 278, il quinto di 160; si domanda la somma totale data all' operaio.

V. Quant' è il patrimonio di Caio, risultando dall'inventario che possiede lire 25360 di beni stabili, e lire 9836 di crediti, e lire 6938 di azioni sulle strade ferrate, e lire 3983 di mobiglia ?

SOTTRAZIONE DEI NUMERI INTERI.

30. La *sottrazione* è quell' operazione aritmetica che ha per oggetto di togliere un numero minore da un altro maggiore.

Il numero maggiore suole chiamarsi *diminuendo*, ed il minore *diminutore.*

Quel numero che si ottiene dopo aver tolto dal maggiore il minore si chiama *resto*, *residuo*, *eccesso*, o *differenza.*

Per indicare che un numero deve togliersi da un altro, si fa uso del segno —, che si pronuncia *meno*, e si scrive fra i due numeri ponendo il diminutore a dritta del segno meno. Così per indicare che da 9 deve togliersi 5, si scrive 9—5, e si legge *9 meno 5*: or poichè da 9 tolto 5 resta 4, ciò può indicarsi adoperando il segno di eguaglianza, cioè scrivendo 9—5=4. Così pure per esprimere che 8—3 è eguale a 17—12, si scriverà 8—3=17—12.

31. *La sottrazione de' numeri interi si fa scrivendo il numero minore sotto il maggiore, in modo che le unità cadano sotto le unità, le decine sotto le decine, le centinaia sotto le centinaia, ec.; e si tira una linea sotto al minore per separarlo dalla differenza; poi, cominciando dalla dritta, si toglie ciascuna cifra inferiore dalla superiore, e quando ciò non può eseguirsi, si aumenta di dieci la cifra superiore; ma nel continuare l' operazione, la cifra significativa seguente a quella aumentata di dieci deve considerarsi diminuita di un' unità, e se vi sono zeri intermedii, debbono considerarsi come 9.*

Sia p. es. il numero 50369 da cui deve togliersi l'altro 23587, scriviamo il numero minore sotto il maggiore, in modo che le cifre dello stesso ordine cadano l'una sotto l'altra, come si vede qui di contro.

Poi cominciamo a togliere le 7 unità del numero minore dalle 9 unità del maggiore; e scriviamo sotto la linea le 2 unità che restano.

50369
23587
26782

Passiamo poi a togliere le 8 decine del numero minore dalle 6 decine del maggiore, ma ciò non potendosi eseguire, le 6 decine si faranno imprestare un centinaio dalla cifra precedente 3 delle centinaia, la quale rimarrà 2, e poichè un centinaio ridotto in decine, ed aggiunto alle 6 decine fa 16 decine, dobbiamo perciò togliere le 8 decine del minore da 16 decine, e scriveremo il resto 8 nel posto delle decine.

Passiamo ora a togliere le 5 centinaia del numero minore dalle centinaia del maggiore, che sono rimaste 2, ma non potendosi, ci faremo imprestare 1 migliaio dalla cifra delle migliaia, la quale essendo zero, bisognerà che essa pure si faccia imprestare una decina di migliaia dalla cifra 5, e però la cifra 5 resta 4, e la cifra zero diviene prima 10, perchè una decina di migliaia forma 10 migliaia, e poi resta 9 perchè impresta 1 migliaio alla cifra delle centinaia; ora 1 migliaio imprestato alle 2 centinaia formando 12 centinaia, bisognerà togliere da 12 centinaia le 5 centinaia del numero minore, ed il resto 7 centinaia si scriverà nel posto delle centinaia.

Passiamo ora a togliere le 3 migliaia del numero minore dalle migliaia del maggiore, le quali sono 9, perchè la cifra zero è divenuta 9; ed il resto 6 migliaia si scriverà nel posto delle migliaia.

Finalmente passiamo a togliere le 2 decine di migliaia del numero minore dalle decine di migliaia del maggiore, che sono rimaste 4, ed il resto 2 si scriverà nel posto delle de-

Digitized by Google

cine di migliaia; così si ha il resto cercato eguale a 26782.

In effetti, avendo tolto dal numero maggiore tutte le unità, decine, centinaia, migliaia, e decine di migliaia del minore, ed essendovi rimaste 2 unità, 8 decine, 7 centinaia, 6 migliaia, e 2 decine di migliaia, ne segue che il numero 26782 composto da tutte queste unità, decine, centinaia, migliaia e decine di migliaia, sarà il resto cercato.

Praticamente si dirà: da 9 tolto 7 resta 2, da 16 tolto 8 resta 8, da 12 tolto 5 resta 7, da 9 tolto 3 resta 6, da 4 tolto 2 resta 2.

PROVA DELLA SOTTRAZIONE E DELL' ADDIZIONE.

32. *La* PROVA *della sottrazione si fa addizionando il numero minore col resto, e deve risultarne per somma il numero maggiore, se l' operazione è stata ben fatta.*

Così p. es. dovendosi togliere il numero 5783 dal numero 7829; eseguendo l' operazione come si vede quì di contro, si avrà per resto 2046. Volendo ora assicurarci se l' operazione sia stata ben fatta, si addizionerà il numero minore 5783 col resto 2046; e poichè si ottiene per somma il numero maggiore 7829, siamo sicuri che l' operazione è stata ben eseguita.

$$\begin{array}{r} 7829 \\ 5783 \\ \hline 2046 \\ 7829 \end{array}$$

In effetti, dal numero maggiore essendosi tolta una sua parte, che è il numero minore, ed il resto essendo l' altra parte, ne segue che queste due parti riunite debbono formare il numero maggiore.

33. *La* PROVA *dell' addizione può farsi separando il primo dei numeri dati dagli altri con una linea, ed addizionando i rimanenti numeri; poi questa seconda somma si toglierà dalla prima, e se vi resta il primo numero che si era separato, è segno che l' operazione era stata ben fatta.*

Digitized by Google

Così p. es. se fossero dati ad addizionare i numeri scritti quì a fianco, la cui somma si trova essere 266533; affin di assicurarsi se l' operazione sia stata ben eseguita, si tirerà una linea sotto il primo numero 85307, e si farà l' addizione di tutti gli altri numeri dati, la somma de' quali si troverà uguale a 181226; indi questa somma si toglierà della prima, e poichè si ottiene per resto il primo numero 85307 che erasi separato, ciò fa vedere che la prima somma ottenuta è giusta.

```
 85307
------
 94234
 86425
   572
------
266533
181226
------
 85307
```

Infatti, dalla somma 266533 che è uguale ai cinque numeri dati, tolta la somma 181226 che è uguale a quattro di questi numeri, deve rimanervi il quinto numero.

34. *Se al diminuendo ed al diminutore si aggiunge o si toglie la stessa quantità, il resto non cambia.*

Perchè, se p. es. al diminuendo si aggiunge 8, nel resto debbono trovarsi 8 unità dippiù; ma se al diminutore si aggiunge pure 8, si vengono a togliere 8 unità dippiù dal diminuendo, perciò il resto deve avere 8 unità di meno. Dunque se da una parte il resto si aumenta di 8, da un' altra diminuendosi di 8, non cambia valore.

In un modo analogo si dimostra che se dal diminuendo e dal diminutore si toglie la stessa quantità, il resto non cambia.

35. Nella sottrazione quando la cifra inferiore non si può togliere dalla superiore, possiamo aumentare la superiore di dieci, senza farci imprestare questa decina dalla cifra a sinistra; ma allora il numero inferiore deve anche aumentarsi di una decina, affinchè il resto non cambiasse; ciò si fa aggiungendo questa decina alla cifra del numero inferiore che è a sinistra di quella che deve togliersi.

Così p. es. dovendo togliersi il numero 5473 dall' altro 8162; dopo scritti i numeri dati secondo la regola, come si vede quì affianco; siccome da 2

```
8162
5473
----
2689
```

Digitized by Google

non si può togliere 3, aggiungiamo una decina a 2, senza imprestarcela dalla cifra 6 a sinistra di 2, e si dirà: da 12 tolto 3 resta 9; ma la decina che si è aggiunta al numero superiore si aggiungerà pure al numero inferiore, aumentando di un'unità la cifra 7 che è a sinistra di 3; e perciò invece di togliersi 7 da 5, si toglierà 8 da 6, ed aumentando anche 6 di dieci si toglierà 8 da 16, e resta 8. Similmente si prosegue dicendo: 5 da 11 resta 6, e 6 da 8 resta 2, e così si avrà il resto 2689.

Esercizii.

I. Un negoziante che aveva comprato 2380 ettolitri di grano ne ha venduto, in sei volte, prima 860 ettolitri, poi 275, poi 120, indi 84, poi 346, infine 58. Si domanda quanti ettolitri di grano gli rimangono a vendere.

II. Il Davalagiri, monte dell'Asia il più alto del globo, si eleva di 8559 metri sul livello del mare. Si domanda di quanto esso supera il monte Bianco, il più alto dell'Europa, che si eleva a 4810 metri, e di quanto il monte Nevado di Sorata, il più alto dell'America, che si eleva a 7696 metri, e di quanto il monte Gunong-Sago, il più alto dell'Oceania, che si eleva a 4575 metri.

III. La massima altezza cui sin ora sia giunto l'uomo, è quella a cui si elevò Brioschi nel pallone in Padova che fu di 8263 metri. Si domanda di quanto essa è inferiore all'altezza del monte Davalagiri, che è 8559 metri, e di quanto supera l'altezza a cui salirono Bouzzingault e Hall sul monte Cimborazo in America che fu 6013 metri, e l'altezza a cui si eleva il Condoro, uccello che vola più alto, la quale è di 6496 metri.

IV. La massima profondità dell'oceano scandagliata fin ora (lat. aus. 36° 49′, long. oc. 37° 6′, Greenwic) è di metri 14042. Si domanda di quanto supera il più profondo pozzo artesiano presso Minden in Prussia che è di 608 metri, e di quanto la più profonda miniera, che è quella di argento presso Guanaxuato nel Messico, la quale è di 522 metri, e il pozzo di Monte Masi in Toscana che è 373 metri.

V. La fune elettrica sottomarina che metteva in comunicazione l'Europa con l'America, da Valenzia a Terranova, era di miglia 2022, e la distanza fra queste due stazioni sulla superficie del mare è miglia 1600. Di quanto la gomona elettrica superava la distanza sulla superficie del mare?

Digitized by Google

Moltiplicazione de' numeri interi.

36. La *moltiplicazione* di due numeri interi è quell' operazione aritmetica, che ha per fine di ripetere un numero tante volte quante unità sono nell' altro.

Il numero che si vuole ripetere si chiama *moltiplicando*. Il numero che dinota quante volte il moltiplicando deve ripetersi si chiama *moltiplicatore*. Il terzo numero che si cerca si chiama *prodotto*. Il moltiplicando ed il moltiplicatore hanno il nome comune di *fattori*, perchè concorrono insieme a *fare* il prodotto.

37. Per indicare che un numero deve moltiplicarsi per un altro si fa ùso del segno $\times$, ovvero di un punto, i quali si scrivono fra il moltiplicando ed il moltiplicatore, e si leggono *moltiplicato per*. Così, per indicare che 3 deve moltiplicarsi per 2, si scrive 3×2, ovvero 3.2, e si legge ***3** moltiplicato per* **2**.

Allorchè ciascuno de' fattori, o un solo di essi, è una somma di più numeri indicata dal segno $+$, la moltiplicazione si accenna chiudendo in parentesi ciascun fattore che è somma di altri numeri. Così, il numero $5+4$ dovendosi moltiplicare per $3+2$, si scriverà $(5+4)\times(3+2)$, e si leggerà ***5+4** moltiplicato per **3+2***. Così pure $5+4$ dovendosi moltiplicare per 3, si scriverà $(5+4)\times 3$.

38. Dalla definizione della moltiplicazione dei numeri interi ne segue che il prodotto si forma addizionando tanti numeri uguali al moltiplicando, quante unità sono nel moltiplicatore: così p. es. dovendo moltiplicarsi 5 per 4, il prodotto sarà $5+5+5+5$, ossia 20.

Ma se volessimo trovare il prodotto di due numeri mediante l' addizione successiva del moltiplicando con sè stesso, l' operazione sarebbe impraticabile quando il moltiplicatore è sufficientemente grande: ecco perchè si è cercato il modo di eseguirla facilmente, come ben tosto vedremo.

39. Nella moltiplicazione dei numeri interi consideriamo tre casi principali che sono:

1.° Quando il moltiplicando ed il moltiplicatore hanno una cifra, che dicesi *caso semplice.*

2.° Quando il moltiplicando è di più cifre, ed il moltiplicatore di una cifra.

3.° Quando il moltiplicando ed il moltiplicatore hanno un numero qualunque di cifre, che è il *caso generale.*

MOLTIPLICAZIONE DI DUE NUMERI DI UNA CIFRA FRA LORO.

40. La moltiplicazione di due numeri di una cifra si fa mediante la tavola di Pitagora, che è una tavola in cui sono registrati i prodotti di due numeri semplici qualsivogliano.

Essa è così chiamata da Pitagora filosofo greco che l'inventò; e vien detta anche *tavola di moltiplicazione.*

La tavola di Pitagora bisogna che s'impari a memoria, altrimenti ogni volta che occorre il prodotto di due numeri di una cifra, si dovrebbe fare addizionando tanti numeri uguali al moltiplicando, quante unità sono nel moltiplicatore.

Cosi p. es. dovendosi moltiplicare 6 per 5, se non si conoscesse che il prodotto è 30, bisognerebbe addizionare $6+6+6+6+6$, e si otterrebbe il prodotto.

Per evitare la detta addizione si formano i prodotti dei numeri di una cifra una volta per sempre, e s'imparano a mente.

Ecco il modo come si forma la tavola di Pitagora.

Considerando che in questa tavola debbono esservi tutti i numeri semplici presi una volta, due volte, tre volte, ec. sino a nove volte, è chiaro che essa si formerà scrivendo tutti questi numeri col loro ordine di grandezza in una linea orizzontale; perciò in questa linea si troveranno tutti i numeri semplici presi una volta. Poi sotto questa prima linea orizzontale si scriveranno in una seconda linea i mede-

simi numeri ripetuti due volte, il che si ottiene addizionando ciascun numero della prima linea con sè stesso. Indi al di sotto della seconda linea si scriveranno in una terza linea tutti i numeri semplici ripetuti tre volte, il che si consegue addizionando ciascun numero della seconda linea con quello che gli sta al di sopra nella prima linea.

Similmente si proseguirà finchè si giunge alla nona linea, dove si troveranno tutti i numeri semplici ripetuti 9 volte; in tal guisa verrà a formarsi la seguente tavola.

Direzione orizzontale

Direzione verticale

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

È chiaro poi che per trovare p. es. in questa tavola 5 ripetuto 7 volte, bisognerà cercarlo nella settima linea orizzontale in quel posto che corrisponde al di sotto del 5 della prima linea, e si troverà essere 35 il prodotto cercato. In una maniera consimile si troveranno nella medesima tavola i prodotti di due numeri semplici qualsivogliano.

MOLTIPLICAZIONE DI UN NUMERO DI PIÙ CIFRE PER UN ALTRO DI UNA CIFRA.

41. *Un numero di più cifre si moltiplica per un altro di una cifra formando i prodotti parziali delle unità, decine, centinaia, ec. del moltiplicando pel moltiplicatore; ma nello scrivere il prodotto delle unità, se esso contiene decine, si scrivono le sole unità, e le decine si ritengono per unirle al prodotto delle decine; e nello scrivere il prodotto delle decine dopo avervi unite quelle riportate dal prodotto delle unità, se vi sono centinaia, si scrivono le sole decine, e le centinaia si ritengono per unirle al prodotto delle centinaia; similmente si prosegue sino all' ultimo prodotto.*

Sia p. es. il numero 5765 da moltiplicarsi per 8. Cominciamo dal ripetere le sue 5 unità 8 volte, disponendo l'operazione come qui affianco, e si dirà: 5 unità moltiplicate per 8 fanno 24 unità, cioè 2 decine e 4 unità; si scriveranno le sole 4 unità, e le 2 decine si ritengono per unirle al prodotto delle 6 decine per 8.

$$\begin{array}{r} 5765 \\ 8 \\ \hline 46104 \end{array}$$

Poi passiamo a moltiplicare le 6 decine per 8, e si dirà: 6 decine moltiplicate per 8 fanno 48 decine, alle quali aggiungendo le due decine ritenute, si avranno 50 decine; ma poichè 50 decine formano 5 centinaia e zero decine, si scriverà zero nel posto delle decine, e le 5 centinaia si ritengono per unirle al prodotto delle 7 centinaia per 8.

Indi si passa a moltiplicare le 7 centinaia per 8, e si dirà: 7 centinaia moltiplicate per 8 fanno 56 centinaia, alle quali aggiungendo le 5 centinaia ritenute, si avranno 61 centinaio; e poichè 61 centinaio formano 6 migliaia ed un centinaio, il centinaio si scrive nel posto delle centinaia, e le 6 migliaia si uniscono al prodotto delle 5 migliaia per 8.

Finalmente si passa a moltiplicare le 5 migliaia per 8, e si dirà: 5 migliaia moltiplicate per 8 fanno 40 migliaia, alle quali aggiungendo le 6 migliaia ritenute, si avranno 46 mi-

gliaia che si scrivono nel posto tali come si sono ottenute, perchè non vi è nient' altro a moltiplicare; quindi il prodotto cercato è il numero 46104.

Praticamente si dirà: 3 per 8, 24, 4 e porto 2; 6 per 8, 48 e 2, 50, zero e porto 5; 7 per 8, 56 e 5, 61, 1 e porto 6; 5 per 8, 40 e 6, 46.

MOLTIPLICAZIONE DI DUE NUMERI DI PIU' CIFRE.

42. Nella moltiplicazione di due numeri di più cifre distinguiamo tre casi, cioè, quando il moltiplicatore è formato dall' unità seguìta da zeri, quando è formato da una cifra significativa seguìta da zeri, e quando è formato da qualsivogliano cifre.

43. *Un numero si moltiplica per 10, per 100, per 1000, ec. aggiungendo uno, due, tre, ec. zeri alla sua dritta.*

Sia p. es. il numero 384 che voglia moltiplicarsi per 10: si aggiunga un zero alla dritta, e si avrà il prodotto cercato che è 3840.

In effetti, la cifra 4 che prima rappresentava unità, ora rappresenta decine che sono 10 volte più grandi delle unità; la cifra 8 che dinotava decine ora dinota centinaia che sono 10 volte più grandi delle decine; e la cifra 3 la quale dinotava centinaia, ora dinota migliaia che sono 10 volte più grandi delle centinaia. Dunque tutte le parti del numero essendo divenute 10 volte maggiori, il numero si è moltiplicato per 10.

Similmente si dimostra che se si aggiungono due zeri si moltiplica per 100, perchè le sue cifre rappresentano unità 100 volte maggiori: e così di seguito.

44. *Corollario.* Poichè aggiungendo uno, due, tre, ec. a dritta di un numero esso diviene 10, 100, 1000 volte maggiore; ne segue che supprimendo uno, due, tre, ec. zeri dalla dritta di un numero esso diviene 10, 100, 1000, ec. volte minore.

Digitized by Google

45. *Un numero si moltiplica per un altro formato da una cifra significativa seguita da zeri, moltiplicandolo per la cifra significativa, e poi aggiungendo a dritta del prodotto i zeri che sono a dritta della medesima.*

Sia p. es. il numero 35 da moltiplicarsi per 700.

Moltiplichiamo 35 per la cifra significativa 7, e si avrà per prodotto 245; aggiungiamo due zeri a dritta di 245, e si avrà il numero 24500, il quale è il prodotto cercato.

Difatti, non considerando i due zeri a dritta del moltiplicatore, esso diviene 100 volte minore, e perciò eseguendo la moltiplicazione, il prodotto 245 che si ottiene sarà pure 100 volte minore del vero; quindi per avere il prodotto vero, bisogna moltiplicare quello ottenuto per 100, il che si fa aggiungendo due zeri alla sua dritta: dunque il vero prodotto sarà 24500.

46. *Due numeri si moltiplicano fra loro facendo i prodotti parziali del moltiplicando per la cifra delle unità, delle decine, delle centinaia, ec. del moltiplicatore; e scrivendo questi prodotti uno sotto l' altro in modo che le cifre del secondo cadano un posto indietro a quelle del primo, e le cifre del terzo due posti indietro, e quelle del quarto tre posti indietro, ec; poi si addizionano, e la somma sarà il prodotto totale cercato.*

Sia il numero 783 che voglia moltiplicarsi per 564.

Ciò vuol dire che 783 deve ripetersi

4 volte,
più 60 volte,
più 500 volte,

e poi debbono addizionarsi i prodotti parziali.

L' operazione si dispone come qui affianco.

Cominciamo dal moltiplicare 783 per 4, cosa che sappiamo fare, e si ha per prodotto 3132.

Passiamo ora a moltiplicare 783 per 60, il che sappiamo che si fa moltiplicando 783 per 6, e poi

```
   783
   564
  ----
  3132
 4698
3915
------
441612
```

Digitized by Google

aggiungendo un zero a dritta del prodotto. Eseguendo la moltiplicazione si ottiene per prodotto 46980, che scriviamo sotto al primo con cui si deve addizionarsi; ma tralasciamo scrivere lo zero a dritta, perchè esso niente influisce nella somma totale.

Passiamo a moltiplicare 783 per 500, il che si fa moltiplicando 783 per 5, ed aggiungendo due zeri alla dritta del prodotto. Eseguendo la moltiplicazione si ha per prodotto 391500, che scriviamo sotto al secondo prodotto parziale, lasciando vuoti i due posti dove cadono i due zeri, perchè essi nulla influiscono nella somma totale. Infine sommiamo i prodotti parziali ottenuti, e si ha il prodotto totale 441612.

Sia per secondo esempio da moltiplicarsi 9038 per 403.

Qui, dopo scritto il prodotto parziale 27114, si osserva che il secondo prodotto parziale, cioè quello del moltiplicando per la cifra delle decine del moltiplicatore è zero; perciò si passa a moltiplicare il moltiplicando per la cifra 4 delle centinaia, ed il prodotto 36152 si scriverà in modo che le sue cifre cadano due posti indietro del primo prodotto, perchè vi andrebbero due zeri a dritta. Indi si sommano i due prodotti parziali e si avrà il prodotto totale.

```
    9038
     403
   -----
   27114
  36152
 -------
 3642314
```

Sia infine da moltiplicarsi 8532 per 70036, dove nel moltiplicando si trovano due zeri di seguito.

Dopo scritto il primo prodotto parziale 51192 ed il secondo 25596, siccome i due prodotti parziali per le cifre delle centinaia e migliaia del moltiplicatore sono eguali a zero, perchè queste cifre sono zero, si passa a moltiplicare per la cifra 7 delle decine di migliaia, ed il prodotto 59724 si scrive tre posti indietro del primo; poi si sommano i tre prodotti parziali ottenuti e si avrà il prodotto totale 597547152.

```
      8532
     70036
     -----
     51192
    25596
 59724
 ---------
 597547152
```

Digitized by Google

47. *I numeri che hanno zeri a dritta si moltiplicano fra loro trascurando i zeri, e poi si aggiungono a dritta del prodotto.*

Supponiamo che un sol fattore abbia zeri a dritta p. es. due; sopprimendo questi zeri, esso diviene 100 volte minore, perciò moltiplicandolo per l' altro fattore, il prodotto sarà pure 100 volte minore del vero, quindi dovrà moltiplicarsi per 100 per avere il vero prodotto, il che si fa aggiungendo alla sua dritta i due zeri soppressi.

Se poi ambedue i fattori avessero zeri a dritta, come avviene se dovesse moltiplicarsi 64000 per 7100; sopprimendo i due zeri a dritta del moltiplicatore, il prodotto si otterrà moltiplicando 64000 per 71, e poi aggiungendovi due zeri a dritta; ma, per la stessa ragione, 64000 si moltiplica per 71, moltiplicando 64 per 71 ed aggiungendo tre zeri a dritta del prodotto, e siccome vi si debbono aggiungere due altri zeri, ne segue che il prodotto si ottiene moltiplicando i fattori non tenendo conto dei zeri a dritta, e poi si aggiungono alla dritta del prodotto.

48. *Il prodotto di due numeri non cambia, se s' inverte l'ordine dei fattori.*

Sia 5 da moltiplicarsi per 8: dico che si ottiene lo stesso prodotto che si ha moltiplicando 8 per 5.

Dim. Difatti, scrivendo invece del moltiplicando tutte le sue unità, verrà $5\times 8=(1+1+1+1+1)\times 8$; ma la quantità in parentesi si ripete 8 volte ripetendo ciascuna unità 8 volte; perciò il prodotto verrà $8+8+8+8+8=8\times 5$.

Dunque $5\times 8=8\times 5$.

Scolio. La tavola di Pitagora fa vedere che il prodotto di due numeri di una cifra non cambia, quando s' inverte l'ordine dei fattori; ma bisognava che questo fatto si fosse dimostrato per due numeri qualsivogliano.

49. *Il prodotto di due fattori ha tante cifre quante ne sono nei due fattori o una di meno.*

Abbia p. es. cinque cifre il moltiplicando e tre il moltiplicatore.

Il prodotto sarà minore di quello che si ha dal moltiplicare il moltiplicando pel minimo numero di quattro cifre, cioè per l' unità seguita da tre zeri, il quale si ottiene mettendo tre zeri a dritta del moltiplicando, e perciò non può avere più di otto cifre; da un'altra parte sarà maggiore o eguale a quello che si ha dal moltiplicare il moltiplicando pel minimo numero di tre cifre, cioè per l' unità seguita da due zeri, il quale si ottiene ponendo due zeri a dritta del moltiplicando, e perciò viene di sette cifre almeno. Quindi avrà tante cifre quante ne hanno i due fattori insieme, o una di meno.

PROVA DELLA MOLTIPLICAZIONE.

30. *La prova della moltiplicazione può farsi eseguendo di bel nuovo l'operazione, con prendere il moltiplicando per moltiplicatore, e viceversa; e se si ottiene un prodotto eguale al primitivo, è segno che l' operazione era stata ben fatta.*

Perchè i prodotti parziali essendo diversi, e formandosi con ordine diverso non può incorrersi nel medesimo errore; ed il prodotto sarà lo stesso, perchè non si altera permutando l' ordine dei fattori.

Così p. es. dovendosi moltiplicare 348 per 271 si trova per prodotto 94308. Ora, per verificare se il prodotto sia giusto, si farà di nuovo l' operazione prendendo il moltiplicando per moltiplicatore, come si vede qui affianco; e poichè si trova anche per prodotto 94308, è segno che quello ottenuto è esatto.

```
  271
  348
 ----
 2168
1084
813
-----
94308
```

La prova della moltiplicazione può anche farsi per mezzo della divisione, come vedremo dopo imparata la divisione.

PRODOTTO DI PIU' FATTORI. — TEOREMI RELATIVI.

31. Avendosi più numeri p. es. i quattro numeri 8, 5, 2, 7; se occorresse che il primo 8 debba moltiplidarsi pel secondo 5, e poi il prodotto 40 che ne nasce si dovesse mol-

tiplicare pel terzo 2, ed il nuovo prodotto 80 che si ottiene si dovesse moltiplicare pel quarto 7; l'ultimo risultato a cui si giunge, il quale è 560, si chiama *prodotto* de' quattro numeri dati.

Dunque, se si propone a fare il *prodotto di più numeri*, significa che il primo deve moltiplicarsi pel secondo, e poi il prodotto che ne nasce per il terzo, ed il nuovo prodotto che si ottiene per il quarto, e così di seguito, sino all'ultimo numero. Ciò si esprime anche dicendo, che i numeri proposti debbono moltiplicarsi *successivamente* fra loro.

52. *Se si moltiplica un numero pel prodotto di due fattori, si ottiene lo stesso risultato che si ha moltiplicandolo prima per uno de'due fattori, e poi il prodotto che ne nasce per l'altro.*

Sia p. es. il numero 9 da moltiplicarsi per 42, che è il prodotto di 7 per 6: dico che tanto è moltiplicare 9 per 42, quanto è moltiplicarlo prima per 7, e poi il prodotto 63 che ne nasce per 6.

Dim. Essendo $42 = 7 \times 6$, il solo fattore 7 sarà 6 volte minore del prodotto 42; laonde, se invece di moltiplicare 9 per 42, lo moltiplichiamo pel fattore 7, veniamo a moltiplicarlo per un numero 6 volte minore; perciò il prodotto 63 che ne risulta, sarà pure 6 volte minore del prodotto vero 9×42; dunque per avere il vero prodotto, converrà moltiplicare 63 per 6; e quindi il prodotto vero 9×42 sarà uguale a 63×6, ossia a $9 \times 7 \times 6$.

53. *Il prodotto di più fattori non cambia comunque si permuti l' ordine dei fattori.*

Dim. È manifesto che il teorema rimarrà dimostrato quando avremo fatto vedere che un fattore qualunque può trasferirsi in qualsivoglia posto, senza che il prodotto si alteri.

Sia il prodotto $2 . 8 . 5 . 7 . 4 . 9$, in cui faremo vedere che il fattore 7 può passare in qualunque posto, senza che il prodotto cambiasse valore.

Consideriamo il prodotto dei fattori a sinistra sino a 7 in-

cluso, come un prodotto di tre fattori, due dei quali sono 7 e 5, e l'altro è il prodotto dei fattori precedenti, che lo chiudiamo in parentesi, per metterlo in evidenza; quindi si avrà $2.8.5.7=(2.8)\times5\times7$; ma tanto è moltiplicare la quantità in parentesi prima per 5 e poi per 7, quant'è moltiplicarla pel prodotto di 5 e 7; e tanto è moltiplicarla pel prodotto di 5 e 7, quant'è moltiplicarlo prima pel fattore 7 e poi pel fattore 5; perciò si avrà

$$2.8.5.7=(2.8)\times5\times7=(2.8)\times7.5,$$

e sopprimendo la parentesi, viene eguale a $2.8.7.5$; quindi nel prodotto proposto sostituendo $2.8.7.5$ invece di $2.8.5.7$, esso viene eguale a $2.8.3.7.4.9$. Perciò il fattore 7 può trasferirsi di un posto verso sinistra senza che il prodotto si alteri.

Da qui segue che il fattore 7 si può trasportare anche di un posto verso dritta senza alterarsi il prodotto; e ciò si fa trasferendo il fattore 4 di un posto verso sinistra, perchè allora il fattore 7 passa di un posto verso dritta.

Della stessa guisa che il fattore 7 si è fatto passare di un posto verso dritta o verso sinistra, si può dopo far passare di un altro posto, e poi di un altro; perciò può trasferirsi in qualunque posto verso dritta o verso sinistra, senza che il prodotto si alterasse.

34. *Se si moltiplica un numero pel prodotto di più fattori, si ottiene lo stesso risultato che si ha moltiplicandolo successivamente per ciascuno dei fattori.*

Sia p. es. il numero 64 da moltiplicarsi pel prodotto dei quattro fattori 2, 7, 5, 3, ch'è 210. Dico che il prodotto di 64 per 210 è uguale a quello che si ottiene moltiplicando prima 64 per 2, e poi il prodotto 128 che ne nasce per 7, ed indi il prodotto 896 che n' emerge per 5, ed infine il terzo prodotto 4480 che ne risulta per 3.

Dim. Difatti $64.210=210.64=2.7.5.3.64$; e facendo passare 64 nel primo posto, si avrà $64.210=64.2.7.5.3$.

Esercizii.

I. In Napoli muoiono (in media) 38 individui al giorno, e ne nascono 45. Quanti ne muoiono e ne nascono in un anno, che è 365 giorni?

II. Il suono in ogni minuto secondo fa un cammino di 340 metri. Il fragore del tuono si è inteso 23 secondi dopo l' apparizione del lampo: si domanda a qual distanza sia la nube tempestosa.

III. Il raggio della terra, è di 3480 miglia. La distanza del sole dalla terra è di 24000 raggi terrestri. Qual' è la distanza in miglia della terra dal sole?

IV. Il Sole è 1284500 volte più grande della Terra, e la Terra 80 volte più grande della Luna. Quante volte il Sole è più grande della Luna?

V. Un negoziante ha comprato 586 ettolitri di vino al prezzo di 26 lire l'ettolitro; ne vende 250 al prezzo di lire 32 l'ettolitro, e vende il resto al prezzo di lire 30. Quanto costa tutto il vino comprato, e quanto è il guadagno che ha fatto?

Divisione dei numeri interi.

55. La *divisione* è quell' operazione aritmetica in cui essendo dato un prodotto ed un fattore si cerca l' altro fattore.

Il prodotto dato si chiama *dividendo*, il fattore noto si chiama *divisore*, ed il fattore che si cerca si chiama *quoziente* o *quoto*.

Conviene intanto osservare che se un numero si volesse dividere in tante parti uguali quante unità sono in un altro, ovvero si volesse trovare quante volte un numero contiene un altro minore, bisognerebbe fare anche una *divisione*. In effetti, quando un numero si vuol dividere in parti eguali, esso è un prodotto che si compone da una delle parti eguali ripetuta tante volte quante unità sono nell'altro numero dato. Ed allorchè si vuol vedere quante volte un numero contiene un altro minore, il maggiore è un prodotto che si compone dal minore preso tante volte quante lo indica il numero che si cerca.

E però, allorchè si deve dividere un numero in parti eguali, il numero che si vuol dividere è il *dividendo*, quello che indica in quante parti deve dividersi è il *divisore*, ed una delle parti eguali che si cerca è il *quoziente*.

Ed allorchè si tratta di vedere quante volte un numero contiene un altro minore, il numero maggiore è il *dividendo*, il minore è il *divisore*, ed il numero cercato che denota quante volte il maggiore contiene il minore è il *quoziente*.

56. Per indicare che un numero deve dividersi per un altro si fa uso di una linea orizzontale, scrivendo il dividendo sopra di essa ed il divisore sotto; e si fa anche uso di due punti l' uno sotto l' altro, mettendo il dividendo a sinistra ed il divisore a dritta dei due punti. Tanto la linea quanto i due punti si leggono *diviso per*. Così p. es. volendo indicare che 8 deve dividersi per 4, si scriverà $\frac{8}{4}$, ovvero 8 : 4; e si leggerà *8 diviso per 4*.

57. Allorchè un numero è uguale ad un altro minore preso un numero intero di volte, il maggiore si dice *multiplo* o *multiplice* del minore, e viceversa il minore si dice *summultiplo*, o *summultiplice*, o *parte aliquota* del maggiore. Così p. es. 20 è *multiplo* o *multiplice*, di 4, e 4 è *summultiplo*, o *summultiplice*, o *parte aliquota* di 20.

Considerando poi i casi particolari, un numero che contiene due volte, tre volte, quattro volte, sino a dieci volte un altro, si dice rispettivamente *doppio*, *triplo*, *quadruplo*, *quintuplo*, *sestuplo*, *settuplo*, *ottuplo*, *nonuplo*, *decuplo* dell' altro; ma al di là di dieci si dice *undici volte maggiore*, *dodici volte maggiore*, ec. dell' altro. (*)

(*) La desinenza *uplo* suole anche darsi ai numeri di due sillabe dove ciò non facesse cattivo suono: tali sono i numeri venti, trenta, cento, potendosi dire *ventuplo, trentuplo, centuplo.*

Allorchè un numero si divide in parti eguali, queste parti diconsi *mezzi*, *terzi*, *quarti*, *quinti*, *sesti*, *settimi*, *ottavi*, *noni*, *decimi*, secondo che sono due, tre, quattro, ec. sino a dieci. Se poi sono più di dieci, si aggiunge la desinenza *esimi* al numero che denota quante sono le parti. Così, se le parti sono 12, si dicono *dodicesimi*, se sono 25 si dicono *venticinquesimi*.

58. Un numero può contenere diversi multipli di un altro minore: il più grande di questi si dice il *maggiore multiplo* del numero minore contenuto nel maggiore. Così p. es. 34 contiene diversi moltipli di 5, che sono 5, 10, 15, 20, 25, 30; il più grande di questi, che è 30, è il maggior multiplo di 5 contenuto in 34.

Allorchè il dividendo non è un multiplo del divisore, esso contiene il divisore ripetuto un certo numero di volte, e contiene dippiù un eccesso che è un numero minore del divisore; questo eccesso si chiama *avanzo* o *resto* della divisione.

La divisione si dice *esatta*, quando risulta senza resto, cioè quando il dividendo è un multiplo del divisore.

Nella divisione degl'interi, allorchè la divisione non viene esatta, chiameremo *quoziente* la parte intera del medesimo; ma a rigore il *quoziente completo* si compone di una parte intera ed una parte fratta che si ottiene col dividere il resto pel divisore.

Così volendosi dividere 39 in 7 parti eguali; siccome 7 è contenuto 5 volte in 39 con l'avanzo 4, 5 non è la settima parte di 39, ma la settima parte di 39 si compone da 5 più la settima parte del resto 4; e per avere il quoziente completo conviene scrivere affianco alla sua parte intera 5 anche la *settima parte* di 4, accennando con la linea la divisione di 4 per 7; e però il quoziente completo è $5+\frac{4}{7}$.

59. Allorchè la divisione non è esatta, il resto essendo l'a-

vanzo del dividendo sul divisore moltiplicato pel quoziente, ne segue che

Il dividendo è uguale al divisore moltiplicato per il quoziente, più il resto.

Così nella divisione di 39 per 7, il dividendo 39 è uguale al divisore 7 moltiplicato per il quoziente 5, più l'avanzo 4, il che si scrive così: $39=7\times5+4$.

61. *In ogni divisione il dividendo è uguale al quoziente completo moltiplicato pel divisore.*

Perchè il dividendo è un prodotto che ha per fattore il quoziente ed il divisore.

60. Nella divisione dei numeri interi consideriamo tre casi.

1.° Quando il divisore ha una cifra.

2.° Quando il dividendo ha tante cifre quante ne bisognano per contenere il divisore.

3.° Quando il dividendo ed il divisore hanno un numero qualunque di cifre, che si dice *caso generale*.

Il primo caso comprende in sè il *caso semplice* della divisione, che è quello in cui il dividendo è minore del decuplo del divisore. Nel caso semplice la divisione si fa a mente mediante la tavola di Pitagora la quale fa conoscere quante volte il dividendo contiene il divisore.

Così p. es. dovendosi dividere 65 per 7; la tavola di Pitagora fa conoscere che 7 è contenuto 9 volte in 65 con l'avanzo di 2 unità, perchè 7 per 9 fa 63, e per giungere a 65 ci vogliono 2 unità.

In questo caso la divisione deve sapersi fare speditamente, perchè esso serve a tutti gli altri casi. Così dovendosi p. es. dividere 75 per 8, 36 per 5, e 54 per 9; dovrà con prontezza dirsi:

8 in 75 è contenuto 9 volte con l'avanzo 3;

5 in 36 è contenuto 7 volte con l'avanzo 1;

9 in 54 è contenuto 6 volte con l'avanzo zero, ossia senza avanzo; e perciò la divisione qui è esatta.

Suole anche dirsi : l' ottava parte di 75 è 9 con l' avanzo 3: la quinta parte di 36 è 7 con l' avanzo 1 ; la nona parte di 54 è 6 esattamente.

DIVISIONE DI UN NUMERO PER UN ALTRO DI UNA CIFRA. (*)

62. *Allorchè il divisore tiene una cifra, si divideranno successivamente le unità dei diversi ordini del dividendo pel divisore, cominciando da quella dell' ordine più alto, e si avranno le corrispondenti cifre del quoziente.*

Porremo per comodità le cifre del quoziente sotto quelle del dividendo che sono dello stess' ordine; e porremo il resto sotto al divisore mettendo una linea verticale fra il dividendo ed il divisore il quale si pone a dritta della linea.

Sia il numero 8476 che voglia dividersi per 3.

8476	3
2825	1

Cominciamo dal dividere le 8 migliaia per 3, e si ha la cifra delle migliaia del quoziente la quale è 2 , e la scriviamo sotto le 8 migliaia del dividendo; ma perchè restano 2 migliaia nel dividendo che unite a mente alle 4 centinaia fanno 24 centinaia , passiamo a dividere le 24 centinaia per 3, e si avrà la cifra delle centinaia del quoziente la quale è 8, e la scriviamo sotto le centinaia del dividendo; e siccome non vi restano centinaia, passiamo a dividere le 7 decine del dividendo per 3, e si avrà la cifra delle decine del quoziente, che è 2, e la scriviamo sotto la cifra 7 delle decine del dividendo ; e poichè vi avanza una decina che aggiunta alle 6 unità fa 16 unità, passiamo a dividere le 16 unità del dividendo per 3 , e si ha la cifra

(*) Questo caso non essendo necessario per passare al caso generale , potrebbe invece ricavarsi da quello, come ho fatto nelle precedenti Edizioni; ma ora ho creduto metterlo prima, affinchè gli allievi si trovassero esercitati in una divisione più facile prima di passare al caso generale.

Digitized by Google

delle unità del quoziente, che è 5, e la scriviamo sotto le unità del dividendo; perciò il quoziente cercato è 2825, ed il resto della divisione è 1 che lo scriviamo sotto al divisore.

Praticamente si dirà: 3 in 8 è contenuto 2 volte con l' avanzo 2, che messo avanti a 4 fa 24; il 3 in 24 è contenuto 8 volte con l' avanzo zero, che messo avanti a 7 fa 7; il 3 in 7 è contenuto 2 volte con l' avanzo 1 che messo avanti a 6 fa 16; il 3 in 16 è contenuto 5 volte con l' avanzo 1; perciò il quoziente è 2825, ed il resto della divisione è 1.

Si suole anche dire: La terza parte di 8 è 2, (e si scrive 2 sotto ad 8); la terza parte di 24 è 8, (e si scrive 8 sotto a 4); la terza parte di 7 è 2 (e si scrive 2 sotto a 7); la terza parte di 16 è 5, (e si scrive 5 sotto a 6); e poichè avanza 1, scriviamo questo avanzo sotto al divisore 3.

Ecco per esercizio altri tre esempi, che bisogna si verificassero dagli allievi.

132500042	5	84923509	4	371532	7
26500008	2	21230877	1	53076	0

DIVISIONE NEL CASO IN CUI IL QUOZIENTE TIENE UNA CIFRA.

63. Il quoziente ha una cifra quando il dividendo essendo maggiore o eguale al divisore, è minore del divisore seguito da un zero.

Difatti allora il dividendo non può contenere il divisore 10 volte, perchè questo seguito dallo zero, ossia moltiplicato per 10, diviene maggiore del dividendo.

In tal caso è chiaro che il dividendo ha tante cifre quante ne ha il divisore, o avendone una dippiù, senza quella a dritta non conterrebbe il divisore.

REGOLA. *Si cerca quante volte la cifra a sinistra del divisore è contenuta nella cifra a sinistra del dividendo o nel numero formato dalle due cifre a sinistra, quando esso ha una cifra dippiù del divisore; si ha così la cifra del quoziente; ma*

Digitized by Google

per assicurarsi se è giusta o troppo grande, bisogna vedere se le unità degli ordini inferiori del divisore sono contenute lo stesso numero di volte nelle unità degli ordini inferiori che rimangono nel dividendo; e se non vi sono contenute, la cifra del quoziente si diminuisce di tante unità finchè vi sono contenute. Poi si moltiplica la cifra del quoziente pel divisore, il prodotto si toglierà dal dividendo, e si avrà il resto della divisione.

Sia il numero 4923 da dividersi per 876.

In questo esempio il quoziente ha una cifra, perchè il dividendo ha una cifra dippiù del divisore, e senza quella a dritta non conterrebbe il divisore.

L' operazione s' intavola scrivendo il divisore a dritta del dividendo, ed il quoziente sotto il divisore, come si vede qui affianco; separando il dividendo dal divisore con una linea verticale, ed il divisore dal quoziente con una linea orizzontale.

4923	876
4380	5
543	

La cifra del quoziente si trova cercando quante volte le 8 centinaia del divisore sono contenute nelle 49 centinaia del dividendo, e poi assicurandosi se le 7 decine del divisore sono pure contenute tante volte nelle decine che restano nel dividendo, e se le 6 unità del divisore sono anche contenute lo stesso numero di volte nelle unità che rimangono nel dividendo. Quindi si dirà: 8 centinaia in 49 centinaia sono contenute 6 volte con l'avanzo di 1 centinaio che unito alle 2 decine fa 12 decine: ma le 7 decine del divisore non sono contenute 6 volte nelle 12 decine rimaste nel dividendo; perciò la cifra 6 del quoziente è troppo grande, quindi si diminuisce di unità e si prende 5, e si dirà: 8 centinaia in 49 centinaia sono contenute 5 volte con l' avanzo di 9 centinaia che unite a 2 decine fanno 92 decine; le 7 decine del divisore sono contenute 5 volte nelle 92 decine del dividendo, con l' avanzo di tante decine che aggiunte alle 3 unità fanno un numero di unità in cui le unità del divisore

sono contenute 5 volte; perciò 5 è la cifra del quoziente.

Ora per avere l' avanzo del dividendo sul divisore preso 5 volte, moltiplicheremo il divisore per il quoziente, e toglieremo il prodotto 4380 dal dividendo, e siccome si ottiene per resto 543, sarà 543 l' *avanzo* o *resto* della divisione.

Questa divisione non essendo riuscita esatta perchè ha dato un resto, il quoziente 5 che si è ottenuto non è il quoziente completo, cioè non è la 876^{esima} parte del divisore, ma rimangono altre 543 unità a dividersi in 876 parti eguali; quindi per avere il quoziente completo conviene aggiungere al quoziente 5 la parte 876^{esima} di 543 che si accenna mediante la linea di divisione, e si scrive affianco a 5; perciò il quoziente completo sarà $5+\frac{543}{876}$.

Avvertimento. Per brevità, nella pratica non si fa il prodotto totale del quoziente pel divisore e poi si toglie; ma, a misura che si ottiene ciascun prodotto parziale del quoziente per ciascuna cifra del divisore, si esegue la sottrazione a mente col metodo del n.° 35, come si vede qui affianco. E però.

4923	876
543	5

Praticamente si dirà: 8 in 49 è contenuto 6 volte con l' avanzo 1, che innanzi 2 fa 12, il 7 in 12 non è contenuto 6 volte, quindi diremo che 8 in 49 è contenuto 5 volte con l' avanzo 9 che innanzi a 2 fa 92, il 7 in 92 è contenuto 5 volte con un avanzo che messo avanti a 3 forma un numero in cui il 6 è contenuto 5 volte; dunque 5 è la cifra del quoziente; questa si moltiplica pel divisore ed il prodotto si toglie nel modo anzidetto dal dividendo; quindi si dirà: 6 per 5, 30, che tolto da 33 resta 3 e si porta 3; 7 per 5, 35, e 3 fanno 38 che tolto da 42 resta 4 e porto 4; 8 per 5 fa 40, e 4 fanno 44, che tolto da 49 resta 5; perciò il resto della divisione è 543.

64. Sia per secondo esempio a dividersi 8307 per 2769.

Qui pure il quoziente tiene una cifra, perchè il dividendo ha tante cifre quante ne ha il divisore.

8307	2769
0000	3

Per trovare poi la cifra del quoziente si cerca quante volte la cifra 2 delle migliaia del divisore è contenuta nella cifra 9 delle migliaia del dividendo, e si dirà: 2 migliaia in 8 migliaia sono contenute 4 volte senza avanzo, ma le 7 centinaia del divisore non sono contenute 4 volte nelle 3 centinaia del dividendo; perciò la cifra 4 si diminuisce di un'unità e si prende 3, e si dirà: 2 migliaia in 8 migliaia sono contenute 3 volte con l'avanzo di 2 migliaia che unite alle 3 centinaia fanno 23centinaia; le 7 centinaia del divisore in 23 centinaia sono contenute 3 volte con l'avanzo di 2 centinaia che unite alle zero decine fanno 20 decine, in cui le 6 decine del divisore sono contenute 3 volte con l' avanzo di 2 decine che unite alle 7 unità fanno 27 unità, in cui le 9 unità del divisore sono contenute giusto 3 volte; perciò la divisione riesce esatta, e 3 è la cifra del quoziente. Per verificarla, moltiplichiamo questa cifra pel divisore, e togliamo il prodotto dal dividendo, e siccome si ottiene per resto zero, ciò conferma che la divisione è esatta.

63. *Avvertimento.* La cifra del quoziente si può ritenere di essere giusta, allorchè l' avanzo del dividendo parziale è 9, ovvero è maggiore della cifra del divisore che sta a dritta di quella che si è veduto quante volte entrava nel dividendo parziale.

259803	84697
5712	3

Così, per esempio, dovendosi dividere 259803 per 84697, intavolando l' operazione come qui affianco, si dirà: l' 8 in 25 è contenuto 3 volte con l' avanzo 1, che messo innanzi a 9 fa 19; il 4 in 19 è contenuto 3 volte con l' avanzo 7, il quale essendo maggiore di 6, si è sicuro che la cifra 3 del quoziente è giusta.

Primieramente osserviamo che quando l' avanzo è 9 la ci-

Digitized by Google

fra del quoziente si può ritenere come giusta, anche se le rimanenti cifre del dividendo sieno tutte zero, e le rimanenti del divisore fossero tutte 9, che sarebbe il caso più sfavorevole; perchè allora deve dirsi: 9 messo avanti a zero fa 90, ed il 9 in 90 è contenuto 9 volte con l' avanzo 9 che messo avanti a zero fa 90, ed il 9 in 90 è contenuto 9 volte con l' avanzo 9; e similmente seguitando si vede che il divisore è contenuto nel dividendo. Or questo con più ragione verificandosi quando l' avanzo è maggiore di 9, resta dimostrato che se l' avanzo è 9 la cifra del quoziente è giusta.

Se poi l' avanzo parziale fosse maggiore della cifra seguente del divisore; supponiamo che l' avanzo sia 8, e 7 la cifra seguente del divisore; e consideriamo il caso più sfavorevole in cui le cifre seguenti del dividendo sieno tutte zero, e le seguenti del divisore siano tutte 9; allora si dirà: 8 messo avanti a zero fa 80, il 7 in 80 è contenuto 9 volte con l' avanzo maggiore di 9, ma quando l' avanzo è maggiore di 9 la cifra del quoziente è giusta. La stessa cosa si verifica per gli avanzi 7, 6, 5, sino ad 1, quando le cifre seguenti del divisore hanno un' unità di meno, cioè sono rispettivamente 6, 5, 4, sino a zero, e quindi con più ragione ciò sarà vero, se avessero più unità di meno.

DIVISIONE NEL CASO GENERALE.

66. *Si separano dalla sinistra del dividendo tante cifre quante ne bisognano a fare un numero che contenga il divisore, il quale numero si chiama* primo dividendo parziale; *questo numero si divide pel divisore e si avrà la cifra a sinistra del quoziente; questa cifra si moltiplica pel divisore ed il prodotto si toglie dal dividendo parziale; si abbassa affianco al resto la cifra seguente del dividendo, ed il numero che ne risulta sarà un* secondo dividendo parziale, *il quale si dividerà pel divisore come il primo, e si avrà la cifra seguente*

del quoziente; si opera rispetto a questa cifra come si è fatto rispetto alla prima, e si prosegue così finchè siansi abbassate tutte le cifre del dividendo.

Allorchè, dopo abbassata una cifra del dividendo, si trova che il divisore non è contenuto nel dividendo parziale, si pone un zero nel quoziente, e poi si abbassa la seguente cifra del dividendo per avere il nuovo dividendo parziale, ed indi si continua la divisione.

La cifra a dritta del primo dividendo parziale, e le rimanenti cifre del dividendo, a misura che si abbassano, si segnano al di sopra con un tratto detto apice.

67. Sia il numero 195245 da dividersi per 246.

Disponiamo l' operazione come si vede qui affianco.

195245	246
2304	793
905	
167	

Volendo dividere 195258 per 246, vuol dire che dobbiamo prendere la 246ma parte di 195245. Cominciamo dal prendere la 246ma parte delle unità degli ordini più alti, perciò queste unità debbono esser tante da fare un numero che contenga il divisore; bisogna dunque separare dalla sinistra del dividendo tante cifre che facciano un numero che contenga il divisore 246. Nel nostro esempio conviene separare quattro cifre le quali fanno il numero 1952 che contiene il divisore 246; e siccome 1952 esprime centinaia, così prenderemo la 246ma parte di 1952 centinaia e si avrà la cifra a sinistra del quoziente che esprime centinaia; nè il quoziente potrebbe contenere migliaia, altrimenti nel dividendo dovrebbero esservi almeno 246 migliaia, e non ve ne sono che 195.

Ora per prendere la 246ma parte di 1952 bisogna dividere 1952 per 246, divisione che sappiamo fare, perchè il quoziente tiene una cifra. Eseguendo questa divisione, troviamo così la cifra a sinistra del quoziente la quale è 7, ed è la cifra delle centinaia. Moltiplichiamo questa cifra pel diviso-

re e togliamo il prodotto dal dividendo parziale 1952, vi restano così 230 centinaia.

Ora passiamo a trovare la cifra delle decine del quoziente, che si ottiene prendendo la 246^{ma} parte delle decine rimaste nel dividendo, e queste decine si ottengono abbassando accanto alle 230 centinaia rimaste, la cifra 4 delle decine, e si hanno 2304 decine. Prendiamo perciò la 246^{ma} parte delle 2304 decine rimaste nel dividendo col dividere 2304 per 246, ed avremo la cifra delle decine del quoziente, che è 9.

Moltiplichiamo questa cifra pel divisore, e togliamo il prodotto dal dividendo parziale 2304, e restano 90 decine.

Passiamo a trovare la cifra delle unità del quoziente, che si ottiene prendendo la 246^{ma} parte delle unità rimaste nel dividendo; e queste unità si hanno abbassando accanto alle 90 decine rimaste la cifra 3 delle unità, e si hanno 903 unità. Prendiamo perciò la 246^{ma} parte delle 903 unità rimaste nel dividendo col dividere 903 per 246, ed avremo la cifra delle unità del quoziente che è 3. Moltiplichiamo questa cifra pel divisore, e togliamo il prodotto dal dividendo parziale 903, e poichè restano 165 unità, la divisione non viene esatta; ed il quoziente cercato è 793.

Il quoziente completo poi si compone da 793 più la 246^{ma} parte del resto 165; perciò viene eguale a $793 + \frac{165}{246}$.

Potrebbe riepilogarsi la dimostrazione nel seguente modo

Essendosi presa la 246^{ma} parte di tutte le centinaia del dividendo, che è stata 7 centinaia, e poi la 246^{ma} parte delle decine in esso rimaste, che è stata 9 decine, ed infine si è presa la 246^{ma} parte delle rimanenti unità, che è stata 3 unità, ne segue che il quoziente si compone di 7 centinaia, di 9 decine, e di 3 unità; perciò esso è uguale a 793; e siccome vi sono rimaste 165 unità di cui deve prendersi la 246^{ma} parte; questa parte si indica col segno di divisione, e si aggiunge a dritta del quoziente, e si avrà il quoziente completo scritto più sopra.

Sia per 2° esempio a dividersi 4344687 per 531.

Eseguiamo la divisione, e troviamo che quando si è giunto al terzo dividendo parziale che esprime centinaia, esso non contiene il divisore 531; ciò vuol dire che il quoziente non ha centinaia; perciò si porrà

43544687	531
1064	82005
2687	
32	

un zero nel quoziente per indicare che in esso manca la cifra delle centinaia, e si abbassa a dritta di 26 la cifra 8 delle decine del dividendo; e poichè il dividendo parziale 268 che ne risulta, e che esprime decine, è pure minore del divisore, vuol dire che il quoziente non ha decine; perciò si porrà un altro zero nel quoziente per indicare che esso non ha decine, e poi si abbassa a dritta di 268 la cifra 7 delle unità del dividendo, e si avrà il numero 2687 che diviso pel divisore dà la cifra 5 delle unità del quoziente, la quale moltiplicata pel divisore, e tolto il prodotto dal dividendo parziale 2687, resta 32; perciò il quoziente è 82005, ed il resto è 32.

Sia infine a dividersi 2128600 per 734.

Effettuando l'operazione come si vede qui di contro, siccome dopo abbassata la cifra zero del dividendo a dritta del secondo resto che è zero, il terzo dividendo parziale

2128600	734
6606	2900
000000	

risulta anche zero, si deve porre un zero nel quoziente, e si abbasserà la rimanente cifra zero del dividendo, e poichè il quarto dividendo parziale che si ottiene è pure zero, si dovrà porre un altro zero nel quoziente; quindi il quoziente viene eguale a 2900, e la divisione riesce esatta, perchè non vi è alcun resto.

68. *Allorchè il divisore tiene zeri a dritta si possono cancellare questi zeri ed altrettante cifre a dritta del dividendo; poi si farà la divisione, e si avrà il quoziente; ed il resto si ha scrivendo a dritta di quello ottenuto le cifre che si sono cancellate a dritta del dividendo.*

Sia da dividersi 603241 per 8000.

È chiaro che si ottiene il quoziente cercando quante volte il divisore, che esprime solo 8 migliaia, è contenuto nelle migliaia del dividendo, le quali sono 603; perciò bisogna vedere quante volte 8 è contenuto in 603, e si trova che vi è contenuto 75 volte con l'avanzo di 3 migliaia; dunque il quoziente è 75, ed il resto è 3 migliaia; ma il dividendo oltre a queste 3 migliaia contiene anche 241 unità, perciò il resto è 3241.

69. *Un numero si divide per 10, 100, 1000, ec. separando rispettivamente una, due, tre, cifre dalla dritta con una virgola; le cifre a sinistra della virgola formano il quoziente, e quelle a dritta formano il resto.*

Sia il numero 75386 da dividersi per 100.

Separando due cifre dalla dritta, il quoziente sarà 753, ed il resto è 86.

Dim. Poichè cancellando i due zeri a dritta del divisore, ed altrettante cifre a dritta del dividendo, l'operazione si riduce a dividere 753 per 1; ma 753 diviso per 1 dà per quoziente lo stesso 753; perciò il quoziente è il numero 753 formato dalle cifre a sinistra della virgola, ed il resto è il numero 86 fatto dalle cifre a dritta.

70. *La divisione di un numero per 11 si può fare come quando il divisore è di una sola cifra.*

Perchè si sa che 11 è contenuto 2 volte in 22, 3 volte in 33, 4 volte in 44, 5 volte in 55 ec. Perciò dovendosi dividere 59360 per 11, disponendo l'operazione come qui affianco, si dirà: 11 in 59 è contenuto 5 volte con l'avanzo 4 che innanzi a 3 fa 43, 11 in 43 è contenuto 3 con l'avanzo 10 che innanzi a 6 fa 106, 11 in 106 è contenuto 9 volte con l'avanzo 7, che innanzi a zero fa 70, 11 in 70 è contenuto 6 volte con l'avanzo 4; perciò il quoziente è 5396, ed il resto è 4.

59360	11
5396	4

PRUOVA DELLA DIVISIONE E DELLA MOLTIPLICAZIONE.

71. La *prova* della divisione può farsi moltiplicando il quoziente pel divisore, ed aggiungendo al prodotto il resto della divisione; se la somma risulta eguale al dividendo, è segno che l' operazione è stata ben fatta.

Ciò perchè sappiamo che il dividendo è uguale al divisore moltiplicato per il quoziente, più il resto.

La *prova* della moltiplicazione può farsi per mezzo della divisione, dividendo il prodotto per un fattore, e deve ottenersi per quoziente l' altro fattore, se l' operazione è stata ben fatta.

Ciò perchè con la divisione si trova il fattore di un dato prodotto, quando si conosce l' altro fattore.

NUMERO DELLE CIFRE DEL QUOZIENTE.

72. *Il quoziente ha tante cifre quant' è la differenza fra il numero delle cifre del dividendo ed il numero di quelle del divisore, o una dippiù.*

È chiaro che le cifre del quoziente sono una dippiù di quante ne restano a dritta del primo dividendo parziale; ma queste cifre che restano sono quant' è la differenza fra quelle del dividendo e quelle del divisore, allorchè il dividendo parziale ha tante cifre quante ne ha il divisore; dunque in tal caso il quoziente ha una cifra dippiù della detta differenza. Quando poi il dividendo parziale ha una cifra dippiù del divisore, quelle che restano sono una di meno della detta differenza; dunque in questo caso il quoziente ha tante cifre quante ne sono nella cennata differenza.

TEOREMI RELATIVI ALLA DIVISIONE.

73. *Se un numero divide esattamente le due parti di un altro numero dividerà esattamente tutto il numero.*

Perchè è chiaro che se è contenuto p. es. 3 volte in una parte e 2 volte nell' altra, vuol dire che è contenuto 3 volte più 2 volte, cioè 5 volte in tutto il numero.

Così il numero 4 che entra esattamente 3 volte in 12, e 2 volte in 8, entrerà esattamente 5 volte, in 20, che è uguale a 12 più 8.

74. *Se un numero divide esattamente un altro numero ed una parte del medesimo, dividerà esattamente l'altra parte.*

Perchè è chiaro che se p. es. è contenuto 8 volte in tutto il numero, e 5 volte in una parte, deve esser contenuto esattamente 8 volte meno 5 volte, cioè 3 volte nell'altra.

Così il numero 2 che è contenuto 8 volte in 16, e 5 volte nella parte 10, sarà contenuto esattamente 3 volte nella rimanente parte 6.

75. *Se il prodotto di più fattori si divide pel prodotto di alcuni suoi fattori, il quoziente sarà il prodotto dei rimanenti fattori.*

Sia il prodotto $5 \times 4 \times 3 \times 9 \times 7$, che voglia dividersi pel prodotto 4×7 dei due fattori 4 e 7, il quoziente sarà il prodotto $5 \times 3 \times 9$ dei rimanenti fattori.

Dim. Passiamo i due fattori 4 e 7 a dritta del prodotto, e chiudiamoli in parentesi, come pure chiudiamo in parentesi i rimanenti fattori, per mettere in evidenza che il prodotto equivale a quello di due fattori. Si avrà così

$$5 \times 4 \times 3 \times 9 \times 7 = (5 \times 3 \times 9) \times (4 \times 7);$$

ma il secondo membro essendo un prodotto di due fattori, se si divide pel secondo fattore dà per quoziente il primo; dunque anche il prodotto proposto diviso per 4×7 darà per quoziente $5 \times 3 \times 9$, che è il prodotto dei rimanenti fattori.

Corol. Se un prodotto di più fattori, in cui la moltiplicazione è accennata e non eseguita, deve dividersi pel prodotto di alcuni di questi fattori, basta sopprimere i detti fattori.

76. *Un prodotto si divide per un numero dividendo un suo fattore per questo numero, e moltiplicando il quoziente pel prodotto dei rimanenti fattori.*

Sia il prodotto $7 \times 36 \times 25$ da dividersi per 9; ciò può far-

si dividendo per 9 il fattore 36, il quale siccome dà per quoziente 4, il quoziente cercato sarà $7 \times 4 \times 25$.

Difatti, essendo $36 = 9 \times 4$, se mettiamo 9×4 invece di 36 nel prodotto dato, esso verrà eguale a $7 \times 9 \times 4 \times 25$; ma questo si divide per 9 sopprimendo il fattore 9, ed il quoziente è $7 \times 4 \times 25$: dunque il quoziente è uguale a quello che si ottiene dividendo il fattore 36 per 9, e moltiplicando il quoziente 4 pel prodotto dei rimanenti fattori.

77. *Se un numero si divide pel prodotto di più fattori, si ottiene lo stesso quoziente che si ha dal dividere il numero successivamente per ciascuno di questi fattori.*

Sia p. es. il numero 180 il quale si divide per 30, che è il prodotto dei fattori 3, 5, e 2, e dà per quoziente 6; dico che se dividiamo 180 pel fattore 3, e poi il quoziente 60 pel fattore 5; ed infine il nuovo quoziente 12 pel fattore 2, si ottiene per quoziente 6, cioè quello ottenuto del dividere 180 per 30.

Indichiamo(*) con a il dividendo, con b il divisore, e con q il quoziente completo; e supponiamo che il divisore b sia il prodotto di tre fattori c, d, e, sicchè si abbia $b = c \times d \times e$.

Ora, se dividiamo a pel fattore c, e chiamiamo q' il quoziente completo, e poi dividiamo q' pel fattore d, e chiamiamo q'' il quoziente completo, ed infine dividiamo q'' pel fattore e, e chiamiamo q''' il quoziente completo: dico che q''' sarà eguale al quoziente q che si ottiene dividendo a per b, che è il prodotto di tre fattori c, d, e.

In effetti, essendo $a = b \times q$, se in questa eguaglianza poniamo invece di b il suo valore $c \times d \times e$, essa si riduce ad

(*) Vi sono certi casi in cui riesce più facile a capire le ragioni, se i numeri si rappresentano con lettere; e solo in questi casi conviene usare le lettere. L'uso delle lettere è utile, perchè generalizza le idee, e prepara gli allievi ad indicare le grandezze con simboli, come si fa nell' algebra.

$a = c \times d \times e \times q$; e se dividiamo i due membri di quest' eguaglianza per c, siccome a diviso per c dà per quoziente q', ed il secondo membro dà per quoziente $d \times e \times q$, si avrà $q' = d \times e \times q$; e dividendo il primo ed il secondo membro di questa eguaglianza per d, siccome q' diviso per d dà per quoziente q'', ed il secondo membro dà per quoziente $e \times q$, verrà perciò $q'' = e \times q$; e dividendo i due membri di questa eguaglianza per e, siccome q'' diviso per e dà per quoziente q''', ed il secondo membro dà per quoziente q, verrà perciò $q''' = q$.

Esercizii.

I. Debbonsi ripartire 3120 chilogrammi di pane a 256 poveri. Quanti chilogrammi e grammi toccano a ciascuno?

Risposta: 12 chilogrammi, e 187 grammi.

Avvertiamo che dopo ottenuto il quoziente in chilogrammi, restano 48 chilogrammi a dividersi per 256; questi si ridurranno in grammi moltiplicandoli per 1000, perchè il chilogrammo è 1000 grammi, ed il prodotto si dividerà per 256; e si avrà il quoziente espresso in chilogrammi e grammi.

II. Un negoziante ha fatto trasportare da Sicilia in Napoli un carico di solfo di 75 tonnellate, per cui ha speso 9225 lire. Quanto gli costa ogni tonnellata, ed a che prezzo dovrebbe vendere un quintale di solfo, per guadagnare su tutto il negozio 2500 lire, essendo la tonnellata 10 quinta li?

Risposta: ogni tonnellata costa 123 lire, ed ogni quintale deve vendersi lire 15 e centesimi 63.

Avvertiamo che dopo ottenuto il prezzo della tonnellata in lire, restano 475 lire; queste si ridurranno in centesimi moltiplicandole per 100, perchè la lira è 100 centesimi, ed il prodotto 47500 che ne risulta si dividerà per 750, e si avranno i centesimi di lira da aggiungersi alle lire ottenute.

III. La terra fa il suo cammino intorno al sole in giorni 365 e 6 ore circa; questo cammino è lungo 530 milioni di miglia. Si domanda quante miglia percorrerà la terra in un minuto primo, essendo il giorno 24 ore, e l' ora 60 minuti primi.

Risposta: 1007 miglia.

IV. La massima velocità di una locomotiva è di 70 miglia ad ora, e la regolare di miglia 25; un miglio è 1852 metri. Quant'è in metri, per ogni minuto primo, la velocità massima e la regolare?

Risposta: la massima è di 2160 metri a minuto, e la regolare di 771.

V. La distanza della Luna dalla Terra e di 60 raggi terrestri: il raggio della Terra è 3480 miglia: la più grande velocità sperimentata della palla di un cannone, quando esce dal pezzo, è di 745 metri a minuto secondo. Quanto tempo questa palla impiegherebbe per giungere dalla Terra alla Luna, se conservasse sempre la detta velocità?

Risposta: 6 giorni, 10 primi, e 57 secondi.

CAP. III.

Potenze e radici dei numeri. — Divisibilità. — Resti delle divisioni. — Numeri primi. — Fattori primi. — Massimo comun divisore. — Minimo multiplo. — Divisori di un numero.

POTENZE E RADICI DEI NUMERI.

78. Il prodotto di più fattori eguali ad uno stesso numero si chiama *potenza* di questo numero, e questo numero si chiama *radice* rispetto alla sua potenza.

Dunque la *radice* di un numero è un altro numero che moltiplicato per sè stesso produce il numero proposto.

La potenza di un numero si dice *seconda*, *terza*, *quarta*, ec. secondo che i fattori eguali che la formano sono due, tre, quattro, ec.; ed il numero si dice rispettivamente *radice seconda*, *terza*, *quarta*, ec. rispetto alla sua potenza.

Così p. es. i prodotti 8.8, 7.7.7, 5.5.5.5, che sono eguali a 64, a 343, a 625, si dicono rispettivamente potenza seconda di 8, potenza terza di 7, e potenza quarta di 5; e viceversa 8 è la radice seconda di 64, 7 è la radice terza di 343, e 5 è la radice quarta di 625.

Per analogia ogni numero si dice *potenza prima* di sè stesso. Qualunque potenza dell' unità è la stessa unità, come qualunque radice dell' unità è la stessa unità.

Alle potenze seconda e terza di un numero si danno anche i nomi di *quadrato* e di *cubo*, ed il numero si dice *radice quadrata* o *cubica* rispetto al suo quadrato, o al suo cubo. Così 36 è il quadrato di 6, e 216 è il cubo di 6, mentre 6 è radice quadrata di 36, ed è radice cubica di 216.

Quando di un numero se ne forma una certa potenza si dice che si *eleva a potenza*; e quando di un numero si trova la radice si dice che se n' *estrae la radice*.

Per indicare un prodotto di più fattori eguali, ossia per indicare che un numero deve elevarsi a potenza, invece di scrivere il numero tante volte quante deve prendersi come fattore, si scrive una sola volta ponendo sopra del medesimo, dalla parte dritta, un altro numero che abbia tante unità quante volte il primo deve prendersi come fattore. Così volendo indicare che 4 deve elevarsi a potenza terza, e 2 a potenza quinta, si scriverà 4^3, e 2^5, leggendosi: *4 elevato a 3*, e *2 elevato a 5*. Il numero *3* o il numero *5* che espone il *grado* della potenza si chiama *esponente*.

Per indicare che da un numero deve estrarsi la radice di un certo *grado*, si fa uso del segno $\sqrt{\ }$, che si dice *segno radicale*, mettendosi a dritta del segno il numero da cui deve estrarsi la radice, ed alla sinistra sull' apertura del segno si mette il numero che indica il grado della radice da estrarsi, e che si chiama *indice del radicale*. Così p. es. per indicare che deve estrarsi la radice seconda o quadrata da 49, e la radice terza o cubica da 27, e la radice quinta da 32, si scriverà $\sqrt[2]{49}$, $\sqrt[3]{27}$, $\sqrt[5]{32}$, leggendosi: *radice quadrata di 49*, *radice cubica di 27*, e *radice quinta di 32*. Quando si tratta di radice quadrata si tralascia di porre l' indice al radicale. Così la radice quadrata di 25 si scrive $\sqrt{25}$.

Digitized by Google

79. Per elevare effettivamente un numero a potenza bisogna moltiplicarlo successivamente per sè stesso tante volte quante unità meno una tiene l'esponente. Così dovendo elevarsi 5 a potenza terza, bisogna moltiplicarlo successivamente due volte per sè stesso: la prima volta si ha $5.5=25$, e poi $25.5=225=5^3$.

80. Per elevare un prodotto a potenza basta elevare a potenza ciascun suo fattore. In effetti, se p. es. il prodotto $5\times7\times9$ deve elevarsi a potenza terza, si avrà

$$(5\times7\times9)^3=5\times7\times9\times5\times7\times9\times5\times7\times9;$$

e ravvicinando i tre fattori eguali a 5, ed i tre eguali a 7, ed i tre eguali a 9, verrà $(5.7.9)^3=5^3.7^3.9^3$.

Da ciò segue che la radice di un prodotto può estrarsi estraendola da ciascun suo fattore; e quindi allorchè si vede a colpo d'occhio che un fattore è potenza esatta della radice da estrarsi, questo fattore può cacciarsi fuori del radicale estraendone la radice. Così p. es. dovendo estrarsi la radice quadrata da 48 che è uguale al prodotto di 16 per 3, e scorgendosi che 16 è quadrato esatto di 4, si estrarrà la radice del fattore 16, e si avrà $\sqrt{48}=\sqrt{16.3}=4\sqrt{3}$. In tal modo la radice invece di estrarsi da 48 si estrarrà dal numero più semplice 3.

Viceversa, un fattore che è fuori di un radicale può farsi entrare sotto del radicale elevandolo alla potenza indicata dall'indice del radicale. Così p. es. nel prodotto $5\sqrt[3]{4}$ il fattore 5 può farsi entrare sotto il radicale elevandolo a potenza terza, e si avrà $5\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{125.4}=\sqrt[3]{500}$. In effetti, estraendo la radice quadrata da 125 che è cubo perfetto di 5, si ritorna al prodotto proposto.

81. Se due potenze del medesimo numero debbono moltiplicarsi fra loro, basta sommare gli esponenti. Così dovendo moltiplicarsi 5^4 per 5^3, il prodotto sarà 5^7; perchè esso formandosi da 5 preso tante volte come fattore quante unità sono nei due esponenti 4 e 3, sarà uguale a 5 con l'esponente 7 che è somma degli esponenti dei fattori.

Viceversa, avendosi due potenze del medesimo numero, se voglia dividersi la maggiore per la minore, si avrà per quoziente la potenza dello stesso numero con un esponente

eguale alla differenza degli esponenti del dividendo e del divisore. Così p. es. 7^5 diviso per 7^2 darà per quoziente 7^3.

Difatti, il dividendo essendo un prodotto che ha per fattori il quoziente ed il divisore, l'esponente del dividendo è uguale alla somma degli esponenti del quoziente e del divisore; perciò se si toglie dall'esponente del dividendo l'esponente del divisore, deve rimanervi l'esponente del quoziente.

CONDIZIONI DI DIVISIBILITÀ — RESTI DELLE DIVISIONI.

82. Un numero si dice *divisibile* per un altro quando contiene esattamente quest' altro; cioè quando il primo è multiplo del secondo.

Un numero divisibile per 2 si chiama numero *pari*.

Un numero che non è divisibile per 2 si chiama numero *impari*, *dispari*, o *caffo*.

83. *Un numero sarà divisibile per 2 o per 5 solo quando la cifra a dritta è divisibile per 2 o per 5.*

Sia il numero 4897. Scomponiamolo in due parti, una delle quali sia la cifra delle unità; esso viene eguale a 4890 + 7; ma la prima parte avendo per fattore 10, perchè è terminata da zero, è divisibile per 2 o per 5, perchè il fattore 10 è divisibile per 2 e per 5; dunque se l'altra parte 7, cioè la cifra a dritta, fosse divisibile per 2 e per 5, il numero sarebbe divisibile per 2 o per 5: e solo in tal caso sarà divisibile per 2 o per 5. Dunque un numero è divisibile per 2 o per 5, solo quando ec.

Quando la divisione non viene esatta si vede che:

Il resto della divisione di un numero per 2 o per 5, sarà quello che si ha dal dividere le cifre a dritta per 2 o per 5.

84. *Un numero sarà divisibile per 4 o per 25 solo quando le due cifre a dritta fanno un numero divisibile per 4 o per 25.*

Sia il numero 8943. Scomponiamolo in due parti, una

Digitized by Google

delle quali sia formata dalle due cifre a dritta; verrà eguale ad 8900 + 43 ; ma la prima parte avendo per fattore 100 è divisibile per 4 e per 25, perchè il fattore 100 è divisibile per 4 e per 25; dunque se l' altra parte, cioè quella formata dalle due cifre a dritta, fosse divisibile per 4 o per 25, il numero sarà divisibile per 4 o per 25 ; e solo in tal caso sarà divisibile per 4 o per 25. Dunque un numero è divisibile per 4 o 25 solo quando ec.

Allorchè la divisione non viene esatta si vede che:

Il resto della divisione di un numero per 4 o 25 sarà quello che si ha dal dividere il numero formato dalle due cifre a dritta per 4 o 25.

85. *Un numero è divisibile per 8 o per 125 solo quando le tre cifre a dritta formano un numero divisibile per 8 o 125.*

La dimostrazione è simile alla precedente, sol che il numero si deve scomporre in tre parti, una delle quali sia formata dalle tre cifre a dritta.

Allorchè la divisione non viene esatta si vede che:

Il resto della divisione di un numero per 8 o per 125 è quelche si ottiene dal dividere il numero formato dalle tre cifre a dritta per 8 o per 125.

86. *Un numero è divisibile per 3 o per 9 solo quando la somma delle sue cifre è divisibile rispettivamente per 3 o per 9.*

Osserviamo primieramente che essendo 10 = 9 + 1, 100 = 99 + 1, 1000 = 999 + 1, ec.; ed essendo i numeri 9, 99, 999, ec. tutti multipli di 9, i numeri 10, 100, 1000, ec. sono eguali ad un multiplo di 9 aumentato di 1. E però, ogni numero formato da una cifra significativa seguìta da zeri è eguale ad un multiplo di 9 aumentato della cifra significativa. Così 300 essendo eguale a 100 + 100 + 100, ed essendo 100 uguale ad un multiplo di 9 più 1, sarà 300 eguale ad un multiplo di 9 più 3.

Ciò premesso, sia il numero 20475. Scomponiamolo nelle

unità dei suoi diversi ordini; esso viene eguale a 20000 $+400+70+5$; e siccome ciascuno di questi numeri è un multiplo di 9 aumentato della cifra significativa, la loro somma sarà un multiplo di 9 aumentato della somma delle cifre significative. Dunque in generale ogni numero pareggia un multiplo di 9 aumentato della somma delle sue cifre; e perciò se si divide per 3 o per 9, siccome la prima parte, che è un multiplo di 9, è divisibile per 3 o per 9, se la seconda parte fosse divisibile per 3 o per 9 il numero sarà divisibile per 3 o per 9. Dunque un numero sarà divisibile per 3 o per 9 quando la somma delle sue cifre è divisibile per 3 o per 9.

Allorchè la divisione non viene esatta si vede che:

Il resto della divisione di un numero per 3 o per 9 sarà quello che si ottiene dal dividere la somma delle sue cifre per 3 o per 9.

87. *Un numero è divisibile per 11 quando la somma delle cifre di posto impari più la somma delle differenze fra 11 e ciascuna cifra di posto pari è divisibile per 11.*

Primieramente osserviamo che $10=9+1$, $100=99+1$, $1000=999+1$, ec. Ma i numeri formati dalla cifra 9 scritta un numero pari di volte sono multipli di 11; dunque i numeri formati dall' unità seguìta da un numero pari di zeri sono eguali ad un multiplo di 11 più 1, ed i numeri formati dall' unità seguìta da un numero impari di zeri sono eguali ad un multiplo di 11 aumentato di 10.

Da qui segue che i numeri formati da una cifra significativa seguìta da un numero pari di zeri, sono eguali ad un multiplo di 11 aumentato della cifra significativa, e se è seguìta da un numero impari di zeri pareggiano un multiplo di 11 più 10 preso tante volte quante unità sono nella cifra significativa, cioè pareggiano un multiplo di 11 aumentato di 10, di 20, di 30, ec. secondo che la cifra significativa è 1, 2, 3, ec. Ma 20 è eguale a un multiplo di 11 più 9 che è

differenza fra 11 e 2; e 30 è eguale a un multiplo di 11 più 8 che è differenza fra 11 e 3; e 40 è eguale a un multiplo di 11 più 7 che è differenza fra 11 e 4; e così di seguito. Perciò un numero formato da una cifra significativa seguita da un numero impari di zeri è uguale ad un multiplo di 11 più la differenza fra 11 e la cifra significativa.

Ciò premesso :

Sia il numero 538479. Scomponendolo nelle unità dei suoi diversi ordini, viene eguale a

$$500000+30000+8000+400+70+9.$$

Ora, siccome i numeri che sono in posto impari cominciando da dritta sono eguali ad un multiplo di 11 aumentato dalla rispettiva cifra significativa; ed i numeri che sono in posto pari sono eguali ad un multiplo di 11 aumentato della differenza fra 11 e la rispettiva cifra significativa; ne segue che il numero proposto sarà uguale ad un multiplo di 11 aumentato della somma delle cifre di posto impari più la somma delle differenze fra 11 e ciascuna cifra di posto pari. Dunque se la somma delle cifre di posto impari, più la somma delle differenze fra 11 e ciascuna cifra di posto pari fosse divisibile per 11, il numero sarà divisibile per 11.

Allorchè la divisione non viene esatta si vede che :

Il resto della divisione di un numero per 11 è quello che si ottiene dal dividere per 11 la somma delle cifre di posto impari più la somma delle differenze fra 11 e ciascuna cifra di posto pari.

Scolio. Siccome la somma $9+4+3+11-7+11-8+11-5$ è formata da un multiplo di 11 più la differenza fra la somma delle cifre di posto impari e quella delle cifre di posto pari, e questa differenza si deve aggiungere ad un multiplo di 11 quando la somma delle cifre di posto impari supera quella delle cifre di posto pari, e si deve togliere quando avviene il contrario; ne segue che la detta differenza, sia che si debba aggiungere, sia che si debba togliere, deve essere anche un multiplo di 11 affinchè il resto sia divisibile per 11. Dunque.

Un numero sarà divisibile per 11 quando la differenza fra la somma delle cifre di posto impari e la somma delle cifre di posto pari è divisibile per 11.

Da qui segue che: *Il resto della divisione di un numero per 11 sarà quello che si ha dal dividere per 11 la differenza fra la somma delle cifre di posto impari e la somma delle cifre di posto pari, se la prima somma è maggiore della seconda; ma se è minore, sarà la differenza fra la detta differenza ed il multiplo di 11 prossimamente maggiore di essa.*

Difatti, quando è minore, la detta differenza deve togliersi da un multiplo di 11, ed il resto si deve dividere per 11. Ora scomponendo questo multiplo di 11 in due multipli, uno che sia prossimamente maggiore della detta differenza, e togliendo da questo multiplo la detta differenza, resta un numero minore di 11 più l'altro multiplo di 11; e però questa somma divisa per 11 dà per resto il numero minore di 11 che si è detto nell'enunciato.

88. *Se si moltiplicano il dividendo ed il divisore per lo stesso numero, e poi si esegue la divisione, il quoziente non cambia; ma il resto sarà uguale al primitivo moltiplicato pel medesimo numero.*

Sia 75 il dividendo e 9 il divisore, sarà 8 il quoziente e 3 il resto della divisione; perciò si avrà l'eguaglianza $75=9\times8+3$. Ora se moltiplichiamo per lo stesso numero, p. es. per 4, i due membri di questa eguaglianza, verrà

$$85\times4=9\times8\times4+3\times4\,;$$

e dividendo per 9×4 i due membri di questa nuova eguaglianza, ed osservando che la prima parte $9\times8\times4$ del secondo membro divisa per 9×4 dà per quoziente 8, verrà

$$\frac{75\times4}{9\times4}=8+\frac{3\times4}{9\times4}\,;$$

cioè il dividendo 75 moltiplicato per 4, diviso pel divisore 9 moltiplicato per 4, dà il medesimo quoziente 8, a cui deve aggiungersi il resto 3×4 da dividersi per 9×4; perciò il resto che rimane a dividersi è uguale al resto primitivo 3 moltiplicato per lo stesso numero 4.

89. *Se il prodotto ed i suoi fattori si dividono per uno*

stesso numero, il resto del prodotto equivale a quello che si ottiene dal dividere il prodotto dei resti dei fattori pel medesimo numero.

Dim. Rappresentiamo con a e b i fattori, con d il divisore e con q e q' i quozienti derivanti dal dividere i fattori a e b pel divisore d, e con r e r' i resti di queste divisioni: si avrà

$$a = dq + r,\ (^*) \qquad b = dq' + r'.$$

Moltiplichiamo queste due eguaglianze membro a membro, ed i prodotti verranno eguali: ma il prodotto dei primi membri è ab, e quello dei secondi membri si ottiene chiaramente moltiplicando prima $dq+r$ per dq', e poi per r', e sommando i risultati; e siccome il prodotto di $dq+r$ per dq' è evidentemente eguale $dqdq'+rdq'$, e quello di $dq+r$ per r' è uguale a $dqr'+rr'$; perciò il prodotto dei secondi membri sarà $dqdq'+rdq'+dqr'+rr'$; e poichè deve eguagliare quello dei primi membri, si avrà

$$ab = dqdq' + rdq' + dqr' + rr'.$$

Or siccome il secondo membro di questa eguaglianza ha tre parti divisibili per d, perchè hanno per fattore d, il resto sarà quello che si ottiene dal dividere la rimanente parte rr' per d; perciò anche il primo membro ab darà per resto quello che si ha dal dividere rr' per d, il che bisognava dimostrare.

PROVA DEL 9 PER LA MOLTIPLICAZIONE.

90. *Si dividano il prodotto ed i fattori per 9; poi i resti dei fattori si moltiplichino fra loro ed il prodotto si divida anche*

(*) Per non complicare la dicitura, abbiamo tralasciato il segno di moltiplicazione fra i fattori, scrivendo p. es. ab invece di $a \times b$: quindi nel leggere il prodotto non diremo: *a moltiplicato per b*, ma lo leggeremo tal quale esso è scritto.

per 9; se si ottiene un resto eguale a quello ottenuto dal prodotto diviso per 9, è segno che l' operazione si era ben fatta.

Sieno p. es. i due fattori 257 e 634; eseguendo la moltiplicazione si trova, per prodotto 162938.

Ora, per assicurarci se l' operazione siasi ben fatta, si divida il prodotto per 9, e si noti il resto 2; poi si dividano i fattori per 9, e si notino i resti 5 e 4; indi si moltiplichino questi resti fra loro, ed il prodotto 20 si divida per 9, e siccome si ottiene per resto 2, che è eguale a quello ottenuto dal prodotto, ciò è segno che l' operazione si era ben fatta.

Perchè abbiamo dimostrato che se il prodotto ed i fattori si dividono per uno stesso numero, il resto del prodotto è uguale a quello che si ottiene dal dividere il prodotto dei resti dei fattori pel medesimo numero.

La stessa regola, si terrebbe per la prova dell' 11.

I quattro resti ottenuti sogliono scriversi con ordine nei quattro angoli di due linee rette che si tagliano, come si vede qui affianco.

2	2
5	4

Avvertimento. La prova del 9 non farebbe conoscere l' errore, se si fosse commesso uno sbaglio di 9 o di un multiplo di 9, perchè si otterrebbe il medesimo resto, come risulta dal n.° 89.

PROVA DEL 9 PER LA DIVISIONE.

91. *Si dividano il dividendo, il divisore, ed il quoziente per 9; poi si moltiplichino fra loro i resti del divisore e del quoziente, ed il prodotto si aggiunga al resto della divisione principale; la somma che ne risulta si divida per 9; se si ha un quoziente eguale a quello ottenuto dal dividendo diviso per 9, è segno che la divisione era stata ben fatta.*

Sia p. es. il numero 195243 che diviso per 246 dà per quoziente 793 e per resto 165. Ora volendo assicurarsi che non si è commesso errore, dividiamo il dividendo, il divisore, ed il quoziente per 9, e notiamo i resti 6, 3, 1

come si vede qui affianco; poi moltiplichiamo fra loro i resti del divisore e del quoziente, ed il prodotto 3 si aggiunga al resto 165 della divisione, e la somma 168 si divida per 9, e siccome si ottiene per resto 6, che è uguale a quello ottenuto dal dividere 195243 per 9, è segno che l' operazione si era ben fatta.

6|6
3|1

In effetti, il dividendo essendo eguale al divisore moltiplicato pel quoziente, più il resto, si avrà l' eguaglianza

$$195243 = 246 \times 793 + 165.$$

In questa eguaglianza il resto del secondo membro si ottiene dividendo la prima parte 246×793 per 9, ed aggiungendo il resto a 165, e poi dividendo la somma per 9; ma il resto della prima parte è uguale a quello che si ottiene dal dividere per 9 il prodotto dei resti del divisore e del quoziente (n.° 89); perciò aggiungendosi un tal resto a 165, e dividendosi la somma per 9 deve risultarne un resto eguale a quello che si ottiene dal dividere il primo membro, ossia il dividendo per 9, se la divisione si era ben fatta.

Invece di dividere il prodotto dei resti per 9 ed aggiungere il quoziente a 165, e poi dividere la somma di nuovo per 9, si può aggiungere il prodotto dei resti a 165, ed indi dividere la somma per 9, come si è detto nella regola.

Similmente si praticherebbe per fare la prova dell' 11.

Anche qui, come nella moltiplicazione, non si conoscerebbe l' errore se si fosse commesso lo sbaglio di 9 o di un multiplo di 9.

92. In questo n.° facciamo osservare quello che avremmo dovuto porre alla fine del n.° 77, cioè che: In una divisione di numeri interi, in cui il quoziente ha una parte intera, questa parte intera non cambia se il dividendo si aumenta di una quantità minore dell' unità. Difatti, è chiaro che se p. es. il dividendo contiene 5 volte il divisore, dovrebbe aumentarsi almeno di un' unità per contenere 6 volte il divisore.

Ciò premesso: indichiamo con a il dividendo e con b il divisore di una divisione in cui b è un prodotto di più fattori, p. e. dei fattori c, d, e; se il dividendo a si divide per b, la parte intera del quoziente sarà eguale alla parte intera dell' ultimo quoziente che si ottiene dal dividere a pel

fattore c, e poi la parte intera del quoziente pel fattore d, ed infine la parte intera del nuovo quoziente pel fattore e; perchè le parti intere di questi quozienti sono eguali alle parti intere dei quozienti completi che si ottengono dividendo a per c, e poi il quoziente completo che ne risulta per d, ed infine il nuovo quoziente completo per e.

Così p. es. se 250 deve dividersi per 70, che è il prodotto dei fattori 5, 2, 7, esso dà per quoziente 3 e per resto 40. Or se dividiamo 250 pel fattore 7 di 70, si ha per quoziente 35, e per resto 5; e se poi dividiamo la parte intera 35 del quoziente pel fattore 2, si avrà per quoziente 17 e per resto 1; e se infine si divide la parte intera 17 del quoziente per l'altro fattore 5, si avrà per quoziente 3, e per resto 2; perciò la parte intera del quoziente sarà eguale alla parte intera che si è ottenuta dividendo 250 successivamente per i fattori 7, 5, 2.

Numeri primi. — Fattori primi di un numero.

93. Si chiama *numero primo* ogni numero intero che non è divisibile per altro numero intero diverso da sè stesso e dall'unità.

Tali sono p. es. i numeri 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ec.

Fra i numeri pari il solo 2 è numero primo, perchè tutti gli altri sono divisibili per 2. I numeri terminati a dritta da 5 non sono primi, perchè divisibili per 5.

94. I fattori di un numero che non possono decomporsi in altri fattori diconsi *fattori primi* o *semplici* del medesimo, ed anche *divisori primi*.

Così p. es. 90 si può decomporre nei due fattori 2 e 45, dei quali 2 è primo, e 45 non è primo; ma se scomponiamo 45 in due altri fattori che sono 9 e 5, allora 90 viene eguale al prodotto $2\times9\times5$ di tre fattori, dei quali 2 e 5 sono primi, e 9 non è primo. E se infine scomponiamo 9 nei due fattori 3 e 3, allora 90 viene eguale al prodotto $2\times3\times3\times5$ di quattro fattori, che sono tutti primi, perchè non possono decomporsi in altri fattori. Due di questi fattori essendo eguali a 3, si può scrivere $90=2\times3^2\times5$..

95. È facile formare una *tavola* di numeri primi, che si

Digitized by Google

estenda sino ad un certo numero, p. e. sino a 1000, vale dire che comprenda tutti i numeri primi che non superano 1000.

Per formarla si scriveranno in un quadro disposti con ordine di grandezza tutti i numeri interi sino a 1000; poi si cancellano da esso tutti quelli divisibili per 2, cioè tutti i numeri pari, eccetto 2 che è primo. Indi si cancellano tutti quelli divisibili per 3, eccetto 3 che è primo, e questi sono di tre in tre posti dopo 3; poi si cancellano tutti quelli divisibili per 5, eccetto 5 che è primo, e questi sono di 5 in 5 posti dopo 5. Similmente si pratica rispetto a quelli divisibili per i numeri primi 7, 11, 13, 17, ec.; e gli altri che rimangono non cancellati, non essendo divisibili per alcun numero, saranno i numeri primi sino a 1000.

Avvertiamo che quante volte si comincia a contare deve contarsi dal numero non cancellato che vien dopo quello da cui si è contato immediatamente prima. Così, dopo che si è contato di 13 in 13, si passa avanti dopo 13, e si trova 17 che non è cancellato, ciò è segno che 17 è numero primo, quindi si dovrà contare di 17 in 17 posti dopo 17. È chiaro poi che 17 è numero primo, altrimenti sarebbe divisibile per un numero primo minore di 17, il che non può avvenire; perchè i numeri divisibili per quelli minori di 17 si sono già cancellati prima.

Nell' eseguire l'operazione accade molto spesso che taluni numeri si trovano già cancellati, ma ciò non reca alcun pregiudizio. Così p. es. quando di conta di 5 in 5, si trovano già cancellati 10, 20, 30, 40, ec. 15, 45, ec., i quali eransi cancellati allorchè si è contato di 2 in 2, e di 3 in 3 (*).

L' operazione dovrà arrestarsi dopo che si è giunto a contare da un numero non cancellato immediatamente minore

(*) Immaginando praticati dei fori sulla tavola nei luoghi dove sono i numeri cancellati, e facendo cadere questi numeri per dentro i fori, restano sulla tavola i soli numeri primi; essa allora prende l'aspetto di un crivello, che dicesi *crivello di Eratostene*, perchè egli lo immaginò.

la radice quadrata di 1000 (la quale è compresa fra 31 e 32 come vedremo in seguito); perchè, se si volesse proseguire, verrebbero a cancellarsi i numeri divisibili per quelli che sono maggiori di detta radice quadrata, e quindi sono divisibili anche per i quozienti che devono essere minori della medesima radice, ma i numeri divisibili per quelli minori di detta radice si trovano già cancellati prima; perciò è inutile contare dai numeri maggiori della cennata radice. Quindi nel nostro caso dopo che si è contato di 31 in 31, si arresterà l'operazione.

Abbiamo detto che i quozienti sono minori della radice quadrata, essendo chiaro che se un numero si divide per la sua radice quadrata, il quoziente sarà la stessa radice, ma se si divide per un numero maggiore della radice quadrata, il quoziente sarà minore di essa radice, perchè crescendo il divisore, diminuisce il quoziente.

Ecco qui appresso una tavola di tutti i numeri primi che hanno due cifre e tre cifre, e vi è il più picciolo di quattro cifre.

11	71	149	229	313	409	499	601	691	809	907
13	73	151	233	317	419	503	607	701	811	911
17	79	157	239	331	421	509	613	709	821	919
19	83	163	241	337	431	521	617	719	823	929
23	89	167	251	347	433	523	619	727	827	937
29	97	173	257	349	439	541	631	733	829	941
31	101	179	263	353	443	547	641	739	839	947
37	103	181	269	359	449	557	643	743	853	953
41	107	191	271	367	457	563	647	751	857	967
43	109	193	277	373	461	569	653	757	859	971
47	113	197	281	379	463	571	659	761	863	977
53	127	199	283	383	467	577	661	769	877	983
59	131	211	293	389	479	587	673	773	881	991
61	137	223	307	397	487	593	677	787	883	997
67	139	227	311	401	491	599	683	797	887	1009

Vi sono per altro tavole che si estendono sino a 100000, come è quella nell'Algebra del *P. Inghirami*, e sino a

3036000, come è quella di *Burckhardt.* Da questa tavola si rileva che vi sono 26 numeri primi da 1 a 100, e 169 da 1 a 1000, e 9592 da 1 a 100000, e 78493 da 1 a 1000000.

96. *La serie dei numeri primi è illimitata.*

Vogliamo provare che per quanto sia grande un numero primo, che denotiamo con P, ve ne sarà sempre un altro maggiore di P. In effetti, il prodotto $1\times2\times3\times5\times7\times11\ldots\times P$ di tutti i numeri primi sino a P è divisibile per tutti questi numeri; ma se vi aggiungiamo l' unità, la somma risultante, che è $1\times2\times3\times5\times7\times\ldots P+1$, non è divisibile per alcun numero primo sino a P, perchè dà per resto 1. Ciò premesso, la detta somma, la quale è maggiore di P, o è un numero primo, o no; se essa è un numero primo, resta già dimostrato di esservi un numero primo maggiore di P; se essa non è numero primo, dovrà esservi un numero primo che la divide esattamente; ma nessun divisore primo sino a P la divide esattamente; dunque il suo divisore primo sarà maggiore di P; perciò in ogni caso vi sarà un numero primo maggiore di P.

MASSIMO COMUN DIVISORE DI DUE NUMERI.

97. Un numero si dice *divisor comune* di più numeri quando divide esattamente tutti questi numeri.

Così p. es. 8 è divisor comune di 24, 40, e 56, perchè divide esattamente questi numeri.

Quei numeri interi che hanno per divisor comune intero la sola unità diconsi *primi fra loro.*

Tali sono i numeri 10 e 21, i quali hanno per divisor comune la sola unità.

Al contrario, 15 e 20 non sono primi fra loro, perchè hanno per divisor comune 5. Similmente, 7 e 28 non sono primi fra loro, perchè hanno per divisor comune 7, che divide sè stesso e divide 28.

Digitized by Google

Il più grande fra i divisori comuni a più numeri dicesi *massimo comun divisore* dei medesimi. Così p. es. i numeri 36 e 54 avendo per divisori comuni i numeri 2, 3, 6, 9, 18, il più grande fra questi, cioè 18, è il massimo comun divisore di 36 e 54.

98. La ricerca del massimo comun divisore dei numeri poggia sul seguente teorema.

Il comun divisore di due numeri deve dividere anche il resto della loro divisione; ed il comun divisore del divisore e del resto deve dividere anche il dividendo.

Indichiamo con a il dividendo, con b il divisore, con q il quoziente, e con r il resto della divisione. Siccome il dividendo è uguale al divisore moltiplicato pel quoziente più il resto, si avrà l' eguaglianza $a=b\times q+r$.

Or poichè il comun divisore di a e b divide il primo membro a, deve dividere anche il secondo membro, ma divide la prima parte $b\times q$ del secondo membro, perchè divide il fattore b, dunque deve anche dividere l' altra parte r, ossia il resto della divisione.

Dico ora che il comun divisore del divisore e del resto deve anche dividere il dividendo. In effetti, considerando la stessa eguaglianza $a=b\times q+r$, il comun divisore di b ed r, dividendo b, dividerà il prodotto $b\times q$; dunque divide le due parti $b\times q$ ed r di cui si compone il secondo membro; perciò dividerà tutto il secondo membro, e quindi anche il dividendo a che è uguale al secondo membro.

99. *Il massimo comun divisore del dividendo e del divisore è pure massimo comun divisore del divisore e del resto della divisione.*

Perchè, se il divisore ed il resto avessero un comun divisore più grande, questo dovrebbe dividere anche il dividendo; perciò sarebbe comun divisore del dividendo e del divisore, e sarebbe più grande del massimo comun divisore, il che è assurdo.

RICERCA DEL MASSIMO COMUN DIVISORE DI DUE NUMERI.

100. *Si divida il numero maggiore pel minore, se la divisione riesce esatta, il minore sarà il massimo comun divisore; ma se non viene esatta, si faccia una seconda divisione, prendendo il divisore della prima per dividendo ed il resto per divisore; se questa seconda divisione riesce esatta, il divisore della medesima sarà il massimo comun divisore; ma se non viene esatta, si proseguiranno similmente le divisioni finchè si giunga ad una divisione senza resto; il divisore di quest'ultima divisione sarà il massimo comun divisore cercato.*

Sieno p. es. i due numeri 4823 e 798, dei quali si voglia il massimo comun divisore.

Si dividerà il numero maggiore 4823 pel minore 798, situando i quozienti delle divisioni al di sopra de' rispettivi divisori, come si vede qui affianco.

	6	22	1	4
4823	798	35	28	7
35	98	7	0	
	28			

E poichè si ottiene per resto 35, si passerà a dividere il divisore 798 pel resto 35; e siccome in questa seconda divisione si ottiene pure un resto, che è 28, si passerà a dividere il divisore 35 pel resto 28; e poichè in questa terza divisione si ottiene per resto 7, si passerà a dividere il divisore 28 pel resto 7; ma perchè quest' ultima divisione riesce esatta, il divisore 7 della medesima sarà il massimo comun divisore cercato.

Dim. È chiaro che se il numero minore dividesse esattamente il maggiore, il numero minore sarebbe il massimo comun divisore cercato; sarebbe comune, perchè divide il maggiore e divide sè stesso; sarebbe poi massimo, perchè un numero non può avere un divisore più grande di sè stesso.

Bisogna dunque dividere il numero maggiore pel minore, per vedere se il minore fosse il massimo comun diviso-

Digitized by Google

re dei due numeri dati. Eseguiamo questa divisione ; e poichè si ottiene per resto 35, ne conchiudiamo che il numero minore non è il massimo comun divisore; ma siccome sappiamo (n.° 99) che il massimo comun divisore di 4823 e 798 è pure massimo comun divisore di 798 e del resto 35, passeremo a trovare il massimo comun divisore fra 798 e 35, quindi, per la stessa ragione detta poco anzi, dobbiamo dividere il numero maggiore 798 pel minore 35 ; eseguendo la divisione ed ottenendosi per resto 28 , non sarà 35 il massimo comun divisore de' due numeri proposti , perciò passeremo a dividere 35 per 28 ; effettuando la divisione, ed ottenendosi per resto 7 , neppure 28 sarà il massimo comun divisore de' due numeri proposti; quindi passeremo a dividere 28 per 7 , e poichè questa divisione riesce esatta, ne conchiudiamo che 7 è il massimo comun divisore dei due numeri proposti.

Avvertimento. Allorquando il divisore dell' ultima divisione è l'unità, i numeri proposti sono *primi fra loro*, perchè non hanno divisor comune più grande dell' unità.

Dunque per conoscere se due numeri sono primi fra loro, conviene trovare il massimo comun divisore dei medesimi; se questo si trova eguale all' unità , i numeri dati sono primi fra loro.

101. Allorchè si giunge ad una divisione dove si vede a colpo d' occhio che il dividendo e il divisore sono numeri primi fra loro, è inutile proseguire l' operazione: e fin d' allora può conchiudersi che i numeri dati sono anche *primi fra loro.*

Così p. es. se occorresse trovare il massimo comun divisore de' due numeri 853 e 92 ; dividendo 853 per 92 si ottiene per resto 25 ; ma poichè si vede che il divisore 92 ed il resto 25 sono primi fra loro, se ne conchiuderà che i numeri proposti sono anche primi fra loro.

TEOREMI RELATIVI AL MASSIMO COMUN DIVISORE ED AI NUMERI PRIMI.

102. ***Ogni comun divisore a due numeri deve dividere il loro massimo comun divisore.***

In effetti, operando su i due numeri dati come se dovesse trovarsi il loro massimo comun divisore, ogni comun divisore ai detti numeri dovrà dividere tutti i resti delle divisioni (n.° 98); quindi dovrà anche dividere il resto della penultima divisione, che è il divisore dell' ultima divisione, ossia il massimo comun divisore di due numeri proposti.

103. ***Se due numeri si moltiplicano per un terzo, il massimo comun divisore dei due prodotti è uguale a quello dei due numeri moltiplicato per il terzo numero.***

Supponiamo che fra due numeri siasi trovato il massimo comun divisore; e supponiamo ancora che i due numeri si moltiplichino per 8, e si cerchi il massimo comun divisore dei due prodotti. In questa seconda ricerca i resti delle divisioni sono eguali a quelli della prima ricerca moltiplicati per 8 (n.° 88); perciò le divisioni si faranno fra numeri 8 volte maggiori di quelli fra quali si facevano nella prima ricerca; dunque dopo lo stesso numero di divisioni si giungerà ad una divisione esatta, e quindi il massimo comun divisore della seconda ricerca sarà eguale a quello della prima moltiplicato per 8.

104. ***Se un numero divide il prodotto di due numeri ed è primo con uno di questi, deve dividere l' altro.***

Sia p. es. il numero 15 che divide il prodotto 28×120, ed è primo col fattore 28, esso dividerà l' altro fattore 120. In effetti, 28 e 15 essendo primi fra loro hanno per massimo comun divisore l' unità; e moltiplicandoli per 120, i prodotti 28×120 e 15×120 hanno (n.° 103) per massimo comun divisore 1×120, ossia 120. Ma ogni comun divisore a due nu-

meri deve dividere il massimo comun divisore; perciò 15 che è divisor comune di 15×120 e di 28×120 dovrà dividere il loro massimo comun divisore 120.

105. *Se un numero primo divide il prodotto di più fattori deve dividere uno di questi fattori.*

Supponiamo che il prodotto sia formato dai fattori a, b, c, d, e che il dato numero primo non divide il fattore a. Possiamo riguardare il prodotto come formato da due fattori, uno dei quali sia a, e l' altro sia il prodotto $b\times c\times d$ dei rimanenti fattori, che per metterlo in evidenza lo chiudiamo in parentesi, scrivendo il prodotto così, $a\times(b\times c\times d)$. Or poichè il dato numero primo divide questo prodotto ed è primo col fattore a, deve dividere il prodotto $b\times c\times d$ dei rimanenti fattori. Per la stessa ragione dividendo il prodotto $b\times c\times d$, se non divide il fattore b, deve dividere il prodotto $c\times d$ dei rimanenti fattori; e così seguitando, se non divide c, dividerà l' altro fattore d; perciò dividerà necessariamente uno dei fattori del prodotto proposto.

106. *Un numero primo che divide la potenza di un numero, dividerà questo numero.*

Perchè la potenza di un numero non è altro che un prodotto di fattori eguali a questo numero; ed un numero primo che divide il prodotto, sappiamo che divide uno dei fattori.

107. *Un numero non è decomponibile che in un sol sistema di fattori primi.*

Supponiamo che un numero sia decomponibile in due sistemi di fattori primi; e sieno a, b, c, d i fattori del primo sistema, e p, q, r, s, t i fattori del secondo. Siccome tanto il prodotto dei primi fattori quanto il prodotto dei secondi fattori è uguale al numero proposto, questi due prodotti saranno eguali fra loro, e si avrà $a\times b\times c\times d=p\times q\times r\times s\times t$; ed in questa eguaglianza possiamo supporre che nessun fattore sia comune al primo ed al secondo membro, perchè se vi fossero fattori comuni si potrebbero dividere per essi i

due membri, e così restano formati da fattori primi diversi. Ciò posto, un fattore qualunque del secondo membro dovendo anche dividere il primo membro che è uguale al secondo, dovrà dividere (n.° 105) uno dei fattori del primo membro; ma ciò è assurdo, perchè i fattori del primo membro sono tutti numeri primi diversi da quelli del secondo.

108. ***Il massimo comun divisore di più numeri si forma dal prodotto di tutti i fattori comuni ai medesimi.***

Perchè il massimo comun divisore di più numeri, dividendo tutti questi numeri, non solo deve essere formato da fattori comuni ai medesimi, ma da tutti i fattori comuni, altrimenti non sarebbe massimo.

109. ***I quozienti che si ottengono dividendo due numeri per il loro massimo comun divisore sono primi fra loro.***

Perchè quando due numeri si dividono pel massimo comun divisore, vengono a sopprimersi i fattori comuni; quindi i quozienti che si ottengono componendosi da fattori non comuni, sono primi fra loro.

110. *Se un numero è divisibile separatamente per più numeri primi fra loro a due a due, sarà divisibile pel loro prodotto.*

Sia il numero a divisibile per un altro b; a deve tenere tra i suoi fattori tutti quelli di b; e se a è pure divisibile per un terzo numero c i cui fattori sono diversi da quelli di b, a deve anche tenere fra suoi fattori tutti quelli di c; e se a è inoltre divisibile per un quarto numero d i cui fattori sono diversi da quelli di b e di c, a deve tenere fra suoi fattori anche quelli di d. Dunque a tenendo tra i suoi fattori tutti quelli di b, di c, e di d, sarà divisibile pel prodotto $b \times c \times d$.

DECOMPOSIZIONE DI UN NUMERO IN FATTORI PRIMI.

111. *Si comincia dal dividere il numero proposto pel numero primo 2, se esso è divisibile per 2, ed il quoziente, se si*

può, si dividerà di nuovo per **2**, *e si continueranno a dividere i successivi quozienti per* **2**, *finchè si giungerà ad un quoziente che non più è divisibile per* **2**. *Giunti a questo quoziente esso si dividerà per* **3** *che è il numero primo appresso a* **2**, *e se la divisione riesce esatta il quoziente che si otterrà si dividerà di nuovo per* **3**, *e si seguiterà la divisione dei successivi quozienti per* **3**, *fino a che si giungerà ad un quoziente che non sia più divisibile per* **3**; *allora si passerà a dividere questo quoziente per* **5**, *che è il numero primo dopo* **3**, *facendosi rispetto a* **5** *quello stesso che si è fatto rispetto a' divisori* **2** *e* **3**; *e similmente si proseguirà a dividere i quozienti esatti successivi per i numeri* **7**, **11**, **13**, *ec. fino a che si perviene ad una divisione in cui il quoziente risulta minore del divisore; allora si cessano le divisioni, perchè il dividendo è numero primo; ed i fattori primi del numero proposto sono quest' ultimo dividendo e tutti i divisori esatti delle divisioni eseguite.*

Sia p. es. il numero 51376941 che voglia decomporsi in fattori primi. Primieramente si osserva che il proposto numero non è divisibile per 2, perciò passiamo a dividerlo per 3, disponendo l' operazione come qui affianco; e perchè la divisione può eseguirsi, l' eseguiremo ed otterremo per quoziente 17125647; poi si continua a dividere questo quoziente per 3,

51376941	3
17125647	3
5708549	7
815507	7
116501	7
16643	11
1513	17
89	89

e si avrà l' altro quoziente 5708549; e siccome questo quoziente non può dividersi per 3 si passa a dividerlo per 5, ma perche non è divisibile per 5 si passa a dividerlo per 7, e si avrà per quoziente 815507, il quale si divide di nuovo per 7, e si avrà per quoziente 116501, che si divide ancora per 7, e si avrà per quoziente 16643; questo quoziente non essendo più divisibile per 7 passeremo a dividerlo per 11

Digitized by Google

che è il numero primo dopo 7, e si troverà per quoziente 1513; il quale non potendosi dividere più per 11, si dividerà per 13 numero primo dopo 11, ma non potendosi dividere per 13, si dividerà per 17 numero primo dopo 13, e si avrà per quoziente 89, poi si continuerà a dividere 89 per 17, e poichè la divisione non viene esatta, ed il quoziente che si ottiene è minore del divisore 17, se ne conchiuderà che 89 è numero primo, ed è l' ultimo ed il massimo fattore primo del numero proposto. Per uniformità l' abbiamo scritto sotto gli altri fattori primi.

La ragione per cui l' ultimo dividendo 89 è numero primo, si è perchè, se la divisione per un numero maggiore di 17 riuscisse esatta, 89 sarebbe anche divisibile per il quoziente che per ipotesi è minore del divisore 17; ma ciò non può avvenire, perchè le divisioni per i numeri primi minori di 17 si sono già tutte esaurite.

Dunque i fattori primi in cui si risolve il numero proposto sono 3, 3, 7, 7, 7, 11, 17, 89.

Difatti, si vede che il numero proposto è uguale al primo divisore 3 che gli stà affianco, moltiplicato pel primo quoziente 17125647, cioè, $51376941 = 3 . 17125647$; per la stessa ragione, il primo quoziente è uguale al secondo divisore 3 che gli sta affianco moltiplicato pel secondo quoziente che gli sta sotto, cioè, $17125647 = 3 . 5708549$; similmente seguitando, si scorge che il numero proposto è uguale al prodotto de' divisori primi che trovansi scritti a dritta della linea, poichè si ha $51376941 = 3 . 17125647 = 3 . 3 . 5708549 = 3 . 3 . 7 . 815507 = 3 . 3 . 7 . 7 . 116501 = 3 . 3 . 7 . 7 . 7 . 16643 = 3.3.7.7.7.11.1513 = 3.3.7.7.7.11.17.89 = 3^2 . 7^3 . 11 . 17 . 89$.

Avvertimento — Allorchè si giunge ad un divisore su cui nasce dubbio se sia o no primo, e non si ha una tavola di numeri primi per as-

sicurarsene, ciò nulla importa; perchè se esso non è primo la divisione non potrà eseguirsi, altrimenti potrebbe eseguirsi anche per i numeri primi fattori del medesimo, e queste divisioni si sono già esaurite; se poi è primo e la divisione per il medesimo riesce esatta, esso sarà un fattore primo del numero proposto; se non riesce esatta si passerà avanti a dividere per i numeri dispari maggiori che non hanno per fattori i numeri 3, 5, 11, affin di evitare inutili divisioni.

112. Allorchè si vede a colpo d'occhio che un numero è decomponibile in fattori non primi, conviene dividerlo successivamente per ciascuno di questi fattori per avere un risparmio di divisioni.

Così p. e. il numero 38253600 volendosi decomporre in fattori primi, osserviamo che esso è divisibile per 100, ossia per $2^2.5^2$; si dividerà dunque per 100, come si vede qui affianco, e si avrà per quoziente 382536. Poi osserviamo che 382536 è divisibile per 8, ossia per 2^3; si dividerà per 8, e si avrà per quoziente 47817. Dopo vediamo che 47817 è divisibile per 9, ossia per 3^2; si dividerà per 9, e si avrà per quoziente 5313. Indi vediamo che 5313 non è più divisibile per 9, ma lo è per 3; si dividerà per 3 e darà per quoziente 1771. Poi si passa a dividere 1771 per 7, e si avrà per quoziente 253 che non trovandosi più divisibile per 7 si dividerà per 11, e si avrà per quoziente il numero primo 23. Perciò il proposto numero è uguale al prodotto $2^2.5^2.2^3.3^2.3.7.11.23 = 2^5.3^3.5^2.7.11.23$.

38253600	$100 = 2^2.5^2$
382536	$8 = 2^3$
47817	$9 = 3^2$
5313	3
1771	7
253	11
23	23

113. Per conoscere se un numero è primo, allorchè non si ha una tavola di numeri primi, si adopera lo stesso procedimento come se si volesse decomporre il dato numero in fattori primi, perchè se non si trova decomponibile in fattori primi sarà primo.

114. Allorchè due numeri sono decomposti in fattori pri-

Digitized by Google

mi, si può subito conoscere se uno sia divisibile per l'altro, e la condizione di divisibilità è la seguente.

Tutti i fattori primi del divisore debbono trovarsi nel dividendo con un esponente che non sia minore di quello che essi hanno nel divisore.

Perchè allora il dividendo può decomporsi in due fattori, uno dei quali sia il prodotto di tutti i fattori che formano il divisore, e l'altro sarà il prodotto dei rimanenti fattori.

RICERCA DEL MASSIMO COMUN DIVISORE DI PIU' NUMERI.

115. *Il massimo comun divisore di più numeri si compone dal prodotto di tutti i fattori primi comuni a questi numeri, presi col minimo esponente.*

Questo prodotto è comun divisore di tutti i numeri dati, perchè ciascuno dei numeri dati contiene tutti i fattori che sono in questo prodotto, e li contiene con un esqonente che non è minore di quello che essi fattori hanno del detto prodotto. È poi massimo, perchè il massimo comun divisore non potrebbe avere uno dei detti fattori con un esponente maggiore, altrimenti non dividerebbe quello dei numeri dati, ove questo fattore ha un esponente minore.

Così p. es. se si volesse il massimo comun divisore dei numeri 144, 504, 3000; decomponendoli in fattori primi si avrà $144=2^4.3^2$, $504=2^3.2^2.7$, $3000=2^3.3.5^3$. Ed osservando che i fattori primi comuni sono 2 e 3, il prodotto dei fattori primi comuni presi col minimo esponente sarà $2^3.3=24$: perciò questo prodotto sarà il massimo comun divisore dei tre numeri dati.

116. Il massimo comun divisore di più numeri si può anche ottenere senza bisogno di decomporre i numeri in fattori primi, nel seguente modo.

Per trovare il massimo comun divisore di tre numeri, si cercherà prima il massimo comun divisore di due di essi, poi si troverà quello

del terzo numero e del massimo comun divisore dei due primi, e questo sarà il massimo comun divisore dei tre numeri dati.

Così p. es. volendosi il massimo comun divisore dei tre numeri 36, 54, e 63. Si troverà prima quello di 36 e 54, che è 18; poi troveremo quello di 18 e di 63 che è 9: dunque 9 sarà il massimo comun divisore dei tre numeri dati.

Difatti, il massimo comun divisore dei tre numeri dovendo dividere i due primi, deve dividere il loro massimo comun divisore; ma deve dividere anche il terzo numero, dunque deve dividere il massimo comun divisore dei due primi ed il terzo numero; perciò esso sarà il massimo comun divisore del terzo numero e del massimo comun divisore dei due primi.

Se si cercasse il massimo comun divisore di quattro numeri, converrebbe trovare prima quello di tre di essi, e poi quello del quarto numero e del massimo comun divisore dei primi tre, e questo sarà quello dei quattro numeri dati. Similmente si troverebbe il massimo comun divisore di più di quattro numeri.

MINIMO MULTIPLO COMUNE DI PIU' NUMERI.

117. Un numero si dice *multiplo comune* o *dividendo comune* di più numeri quando è divisibile esattamente per tutti questi numeri.

Il più picciolo fra i multipli comuni a più numeri si dice *minimo multiplo comune* di questi numeri, o *minimo comun dividendo* dei medesimi.

Così p. es. il minimo multiplo di 4, 6, e 15, è 60; perchè è il più picciolo numero che possa dividersi esattamente per 4, 6, e 15.

118. *Il minimo multiplo comune di più numeri si compone dal prodotto di tutti i fattori primi diseguali di questi numeri, presi col massimo esponente.*

Questo prodotto è multiplo comune di tutti i numeri dati, perchè contiene tutti i fattori primi che sono in ognuno dei numeri dati, e li contiene con un esponente che non è minore di quello che hanno nei numeri dati. È poi minimo,

perchè il minimo multiplo comune non può avere uno dei detti fattori con un esponente minore; altrimenti non sarebbe divisibile per quello dei numeri dati, ove questo fattore ha un esponente maggiore.

Sieno p. es. i numeri 144, 504, 3000 di cui vogliasi il minimo multiplo. Scomponendoli in fattori primi si ha $144=2^4.3^2$, $504=2^3.3.7$, $3000=2^3.3.5^3$; quindi i fattori primi di questi numeri sono 2, 3, 7, 5, ed il prodotto dei medesimi presi col massimo esponente è $2^4.3^2.5^3.7=126000$: perciò questo prodotto sarà il minimo multiplo dei numeri proposti.

119. Il minimo multiplo comune di più numeri si può anche ottenere senza bisogno di decomporre i numeri in fattori primi, come ora passiamo a vedere per due numeri, e poi per più di due.

Il minimo multiplo di due numeri è uguale ad uno di essi moltiplicato pel quoziente che si ottiene dividendo l' altro numero per il loro massimo comun divisore.

Così p. e. se vogliasi il minimo multiplo di 36 e 54; si troverà prima il loro massimo comun divisore che è 18; poi uno dei numeri p. es. 36 si divide per 18, ed il quoziente 2 si moltiplica per 54, e si avrà il minimo multiplo che è 108.

Dim. È chiaro che il minimo multiplo comune di due numeri deve contenere i fattori comuni ai due numeri, ed i fattori non comuni, affinchè fosse divisibile per ciascuno dei due numeri; altrimenti se uno dei detti fattori mancasse, non sarebbe divisibile per quello dei due numeri che non ha questo fattore o per ambedue i numeri. Ma il prodotto dei fattori comuni ai due numeri è il loro massimo comun divisore, ed i fattori non comuni si hanno dividendo ciascuno dei numeri pel massimo comun divisore; perciò indicando con d il massimo comun divisore, e con q e q' i quozienti che si ottengono dividendo i due numeri per d, il loro minimo multiplo sarà $d \times q \times q'$. Ma il prodotto $d \times q$ è uno dei numeri dati, e q' è il quoziente che si ottiene dividendo l'altro pel massimo comun divisore. Dunque il minimo multiplo di due numeri è uguale ad uno di essi moltiplicato pel quoziente ec.

Da qui si vede che potrebbe anche darsi la seguente regola.

Il minimo multiplo di due numeri si ottiene dividendo il prodotto di questi numeri per il loro massimo comun divisore.

120. *Ogni multiplo comune di due numeri sarà multiplo del loro minimo multiplo.*

In effetti, ogni multiplo dei due numeri, affinchè sia divisibile per ciascuno di essi deve sempre contenere i fattori comuni e non comuni ai due numeri; ed oltre di questi, che formano il prodotto $d \times q \times q'$ ossia il minimo multiplo, può contenere anche altri fattori; perciò sarà multiplo del minimo multiplo.

121. Per trovare il minimo multiplo comune di tre numeri, si cercherà prima il minimo multiplo di due di essi, e poi quello del terzo numero e del minimo multiplo dei due primi, e questo sarà quello dei tre numeri dati.

Così p. es. volendosi il minimo multiplo dei tre numeri 8, 10, e 12; cercheremo prima quello di 8 e 10, che è 40; poi cercheremo quello di 40 e 12 che è 120, e questo sarà il minimo multiplo dei tre numeri dati.

In effetti, sarà multiplo comune, perchè è multiplo del terzo numero ed è multiplo di un multiplo degli altri due. É poi minimo, perchè il minimo multiplo dei tre numeri non può esser minore del minimo multiplo dei due primi, perciò, o sarà eguale al minimo multiplo dei due primi, o sarà un multiplo di questo minimo multiplo; ma deve esser multiplo del terzo numero, dunque il minimo multiplo dei tre numeri è multiplo del terzo numero, e del minimo multiplo dei due primi; perciò esso sarà il minimo multiplo del terzo numero e del minimo multiplo dei due primi.

Se si volesse il minimo multiplo comune di quattro numeri, si troverebbe prima quello di tre di essi, e poi quello del quarto numero e del minimo multiplo dei tre primi, e questo sarà quello dei quattro numeri dati.

Similmente si praticherebbe se i numeri dati fossero più di quattro.

RICERCA DI TUTTI I DIVISORI DI UN NUMERO.

122. *Si trovino tutti i fattori primi del numero proposto, e si scriva ciascuno con i diversi esponenti che esso tiene sino al massimo in una rispettiva colonna verticale, e si ponga in testa di ogni colonna anche il fattore 1; poi si moltiplichino i fattori contenuti nella prima colonna per ciascuno di quelli contenuti nella seconda, i diversi prodotti che si ottengono, e che si scrivono in un' altra colonna, saranno tutti i divisori*

Digitized by Google

del numero proposto, se esso ha due soli fattori primi; ma se ne ha tre, si moltiplichino i prodotti ottenuti dalle due prime colonne per i fattori contenuti nella terza colonna, ed i nuovi prodotti che si ottengono, e che si scrivono in altra colonna, saranno tutti i divisori possibili del numero proposto. Similmente si pratichi se i fattori primi fossero più di tre.

Supponiamo che vogliansi trovare tutti i divisori del numero 245000. I suoi fattori primi sono 2, 5, 7; e presi col massimo esponente sono 2^3, 5^4, 7^2.

Scriviamo in tre colonne i detti fattori primi presi con i diversi esponenti sino al massimo che essi hanno; ed in testa di ciascuna colonna scriviamo anche il fattore 1.

1	1	1
2	5	7
2^2	5^2	7^2
2^3	5^3	
	5^4	

In queste tre colonne si trovano tutti i divisori primi del numero proposto elevati a potenze sino alla massima che essi hanno. Ma per trovare tutti i divisori possibili del numero proposto conviene moltiplicare tutti i divisori contenuti nella prima colonna per ciascuno contenuto nella seconda; e poi tutti quelli che ne risultano per ciascuno contenuto nella terza colonna; e così di seguito se vi fossero altre colonne.

$1 =$	1
$2 =$	2
$2^2 =$	4
$2^3 =$	8
$5 =$	5
$2.5 =$	10
$2^2.5 =$	20
$2^3.5 =$	40
$5^2 =$	25
$2.5^2 =$	50
$2^2.5^2 =$	100
$2^3.5^2 =$	200
$2.5^3 =$	125
$5^3 =$	250
$2^2.5^3 =$	500
$2^3.5^3 =$	1000
$5^4 =$	625
$2.5^4 =$	1250
$2^2.5^4 =$	2500
$2^3.5^4 =$	5000

Difatti, è chiaro che moltiplicando tutti i fattori contenuti nella prima colonna per ciascuno contenuto nella seconda, si hanno tutti i divisori possibili del numero proposto quando esso è formato da due soli fattori primi, perchè si vede che nessuna delle combinazioni dei diversi divisori moltiplicati fra loro può mancarvi, e nessun divisore vi sarà ripetuto; per la ragione che moltiplicando tutti i numeri della prima colonna pel fattore 1 contenuto

nella seconda, si hanno quattro prodotti diversi fra loro; e poi moltiplicandoli pel fattore 5, si hanno altri quattro prodotti diversi fra loro e diversi dai primi quattro; e dopo moltiplicandoli pel fattore 5^2, si hanno altri quattro prodotti diversi fra loro e dai primi otto: e similmente seguitando si scorge che tutti i prodotti che si ottengono sono diversi fra loro, e sono tutti i divisori possibili del numero proposto, non essendovene alcuno che non divida il numero proposto, perchè sono formati dai fattori primi del medesimo presi con un esponente minore o eguale al massimo che essi hanno; e solo l'ultimo prodotto è formato da tutti i fattori primi presi col massimo esponente, e perciò l'ultimo prodotto è uguale al numero proposto.

Se poi il numero proposto fosse formato da tre fattori primi; tutti i divisori che si sono ottenuti dal moltiplicare le due prime colonne, i quali si pongono in una quarta colonna, si moltiplicano successivamente per quelli contenuti nella terza; e per la medesima ragione si avranno prodotti tutti diversi, che sono tutti i divisori possibili del numero proposto.

Da ciò segue che se i fattori primi del numero proposto fossero due solamente, indicando con a il numero dei divisori contenuti nella prima colonna, e con b il numero dei divisori contenuti nella seconda colonna, il numero dei divisori del numero proposto sarà rappresentato dal prodotto $a \times b$: vale a dire è uguale al prodotto dei più grandi esponenti aumentati dell'unità, che hanno i fattori primi del numero proposto. Lo stesso teorema ha luogo quando i fattori primi sono più di due.

È da osservarsi che fra i divisori del numero proposto trovati nel predetto modo è compresa l'unità ed il numero stesso; risultando l'unità dal moltiplicare fra loro le unità delle diverse colonne, ed il numero proposto dal moltiplicare fra loro i fattori primi presi col massimo esponente.

Nel nostro esempio i divisori della prima colonna essendo indicati da 3+1, cioè dal massimo esponente del fattore primo 2 aumentato dell' unità, e quelli della seconda colonna da 4+1, cioè dal massimo esponente del fattore primo 5 aumentato della unità, e quelli della terza da 2+1, cioè dal massimo esponente del fattore primo 7 aumentato di una unità; ne segue che il numero dei divisori del numero proposto sarà $(3+1)(4+1)(2+1)=4\times5\times3=60$.

Effettuando nel modo indicato le moltiplicazioni dei divisori scritti nella quarta colonna per quelli della terza si ottengono tutti i 60 divisori del numero proposto, che sono i seguenti 1, 2, 4, 8, 5, 10, 20, 40, 25, 50, 100, 200, 125, 250, 500, 1000, 625, 1250, 2500, 5000, 7, 14, 28, 56, 35, 76, 140, 280, 175, 350, 700, 1400, 875, 1750, 3500, 7000, 4375, 8750, 17500, 35000, 49, 98, 196, 392, 245, 490, 980, 1960, 1225, 2450, 4900, 9800, 6125, 12250, 24500, 49000, 30625, 61250, 122500, 245000.

CAP. IV.

Frazioni.

DEFINIZIONI E PROPRIETÀ DELLE FRAZIONI.

123. Spesso occorre dividere l' unità in parti eguali, e prendere un certo numero di queste parti. Ciò premesso:

Si chiama *frazione* quel numero che esprime una o più parti dell' unità divisa in parti eguali. Esso si dice anche *fratto* o *rotto*.

Dunque per rappresentare una frazione si richieggono due numeri interi, uno che indica in quante parti eguali si suppone divisa l' unità, e si chiama *denominatore*, l' altro che dinota quante di queste parti si prendono, e si chiama *numeratore*. Il numeratore ed il denominatore hanno il nome comune di *termini* della frazione.

Una frazione si enuncia proferendo prima il numeratore e poi il denominatore, il quale, secondo che le parti in cui è divisa l'unità sono 2, 3, 4, ec. si pronuncia *mezzi*, *terzi*, *quarti*, ec. e se sono più di 10 si fa terminare in *esimi*.

Così quando l'unità è divisa in 7 parti eguali e se ne prendono 3, si pronuncia *tre settimi*; e quando è divisa in 12 parti eguali e se ne prendono 5, si pronunzia *cinque dodicesimi*.

Una frazione si scrive mettendo il numeratore sopra il denominatore, ponendo fra essi un tratto orizzontale, che dicesi *linea di frazione*.

Così le frazioni che hanno per numeratori i numeri 1, 8, 3, 5, 4, e per denominatori rispettivi i numeri 2, 9, 10, 13, 125, si scrivono nel seguente modo $\frac{1}{2}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{5}{13}$, $\frac{4}{125}$, e si leggono così: *un mezzo*, *otto noni*, *tre decimi*, *cinque tredicesimi*, *quattro centoventicinquesimi*.

Una frazione si dice *vera* o *propria* quando è minore dell'unità; e si conosce dall'essere il numeratore minore del denominatore, perchè in essa si prende un numero di parti minore di quello in cui è divisa l'unità.

Una frazione si dice *spuria* o *impropria* quando è maggiore o eguale all'unità; ed è maggiore dell'unità quando il numeratore è maggiore del denominatore, perchè si prende un numero di parti maggiore di quello in cui si è divisa l'unità. È uguale all'unità quando il numeratore è uguale al denominatore, perchè l'unità è divisa in parti eguali, e si prende lo stesso numero di parti. Così le frazioni $\frac{3}{3}$, $\frac{16}{16}$, $\frac{123}{120}$, sono tutte eguali all'unità.

L'insieme di un intero ed una frazione vera si dice anche *numero frazionario*.

124. Passiamo ora ad esaminare i CAMBIAMENTI che av-

vengono in una frazione, cambiando i suoi termini, o perchè si aumentano di un' intero, o perchè si moltiplicano o dividono per un intero.

125. *Se si aumenta il solo numeratore, la frazione aumenta; e se si diminuisce, la frazione diminuisce.*

Perchè quando si aumenta il solo numeratore si prendono più parti dell'unità, le quali avendo lo stesso valore, perchè il denominatore è rimasto lo stesso, la frazione cresce.

Similmente si vede che quando diminuisce il solo numeratore, la frazione diminuisce.

126. *Se si aumenta il solo denominatore, la frazione diminuisce; e se si diminuisce, la frazione cresce.*

Perchè quando si aumenta il solo denominatore, si prende lo stesso numero di parti dell' unità, le quali avendo un valore minore, perchè l' unità è divisa in più parti, la frazione diminuisce. Similmente si scorge che quando si diminuisce il solo denominatore, la frazione cresce.

127. *Se ai termini di una frazione si aggiunge o toglie lo stesso numero, la frazione nel primo caso si avvicina all' unità, e nel secondo se n' allontana.*

In effetti, quando si aggiunge ai due termini della frazione lo stesso numero, la differenza fra essi non cambia (n.° 34); ma siccome questa differenza esprime di quante parti la frazione differisce dall' unità, ne segue che la frazione differisce dall' unità dello stesso numero di parti che prima ne differiva, ma queste parti essendo più picciole perchè il denominatore è più grande, la frazione differisce meno dall' unità; perciò aumenta se è vera, e diminuisce se è spuria.

Similmente ragionando si vede, che togliendo da ambedue i termini lo stesso numero, la frazione si allontana dall' unità.

128. *Moltiplicando il numeratore per un numero, la frazione si moltiplica per quel numero; e dividendo il numeratore, la frazione si divide.*

Sia la frazione $\frac{8}{11}$ il cui numeratore si moltiplichi per 5,

ne verrà la frazione $\frac{40}{11}$ che è 5 volte maggiore della prima.

Difatti, nella prima frazione l'unità è divisa in 11 parti eguali e se ne prendono 8; nella seconda essa pure è divisa in 11 parti eguali, perciò le parti hanno lo stesso valore, ma siccome se ne prende un numero 5 volte maggiore, la frazione che ne risulta sarà 5 volte maggiore della prima.

Similmente si dimostra che se il numeratore di una frazione si divide per un numero, senza alterare il denominatore, la frazione si dividerà pel medesimo numero.

129. *Moltiplicando il denominatore per un numero, la frazione si divide per lo stesso numero; e dividendo il denominatore, la frazione si moltiplica.*

Sia la frazione $\frac{7}{9}$ il cui denominatore si moltiplichi per 4, ne verrà la frazione $\frac{7}{36}$ che è 4 volte minore della prima.

In effetti, nella prima frazione l'unità è divisa in 9 parti eguali e se ne prendono 7; ma nella seconda frazione l'unità è divisa in un numero di parti 4 volte maggiore, perciò ciascuna di esse avrà un valore 4 volte minore di ciascuna delle prime; e siccome si prende lo stesso numero di parti, la frazione che ne risulta sarà 4 volte minore della prima.

Similmente si dimostra che se si divide il denominatore di una frazione per un numero, la frazione si moltiplicherà per quel numero.

130. *Se i termini di una frazione si moltiplicano o si dividono ambedue per lo stesso numero, la frazione non cambia valore.*

Così, se ambedue i termini della frazione $\frac{3}{5}$ si moltiplicano per 4, essa non cambia valore, e viene eguale alla

frazione $\frac{12}{20}$; e se ambedue i termini della frazione $\frac{8}{14}$ si dividono per 2, essa non cambia valore, e viene eguale alla frazione $\frac{4}{7}$.

Perchè moltiplicando il numeratore, essa diviene un certo numero di volte maggiore; ma moltiplicando poi il denominatore per lo stesso numero, essa diviene altrettante volte minore; perciò torna a prendere il primiero valore.

Similmente si prova che dividendo ambedue i termini per lo stesso numero, la frazione non cambia valore.

131. *Ogni frazione equivale al quoziente che si ottiene dividendo il numeratore per il denominatore.*

Sia la frazione $\frac{5}{7}$; essa è uguale a 5 diviso per 7, cioè è uguale alla *settima* parte di 5.

Difatti, per avere la settima parte di cinque unità, bisogna prendere la settima parte della prima unità che è un *settimo* più la settima parte della seconda unità, che è un altro *settimo*, più la settima parte della terza unità, che è un altro *settimo*; e così seguitando si vede che la settima parte di 5 unità è *cinque settimi*; e quindi $5:7=\frac{5}{7}$.

132. ***Se due frazioni sono eguali, ed i termini di una sono primi fra loro, i termini dell' altra sono equimultiplici di quelli della prima.***

Sieno le frazioni eguali $\frac{9}{28}$ e $\frac{45}{120}$, ed i termini della prima sieno numeri primi fra loro; i termini della seconda saranno equimultiplici di quelli della prima.

Moltiplichiamo queste frazioni eguali pel denominatore della seconda, i prodotti saranno anche eguali; perciò verrà $\frac{9\times120}{28}=45$. Dunque 28 divide esattamente il prodotto 9×120, perchè il quoziente è l' in-

tero 45; ma 28 è primo col fattore 9, perciò deve dividere l' altro fattore 120; e chiamando q il quoziente, si avrà $120=28\times q$; e ponendo questo valore di 120 nell' eguaglianza precedente, essa diverrà $\frac{9\times28\times q}{28}=45$; e siccome il primo membro si riduce a $9\times q$, perchè il numeratore si può dividere per 28, verrà $9\times q=45$. Essendo dunque 45 eguale a 9 preso q volte, e 120 eguale a 28 preso q volte, ne segue che i due termini della seconda frazione sono equimultiplici di quelli della prima.

Riduzioni delle frazioni.

133. Vanno comprese sotto il titolo di *riduzioni delle frazioni* tutte quelle operazioni che si fanno per convertire le frazioni in altre equivalenti, ma espresse con diversi termini; ovvero si fanno per trasformare un intero in numero frazionario, o un intero ed un fratto in sol numero frazionario, e viceversa.

SEMPLIFICAZIONE DELLE FRAZIONI, E LORO RIDUZIONE A MINIMI TERMINI.

134. Una frazione si *semplifica* dividendo i suoi termini per lo stesso numero, perchè essi divengono più piccioli, e la frazione non cambia valore.

Allorchè una frazione si semplifica in modo che i suoi termini divengono i più piccoli possibili, si dice *ridotta alla più semplice espressione*, ovvero *a minimi termini.*

Quando una frazione non è capace di ridursi ad una più semplice espressione, si dice *irriducibile* o *iriduttibile.*

135. *Una frazione è irriducibile quando i suoi termini non hanno alcun fattor comune.*

Perchè allora qualunque altra frazione equivalente alla prima ha i suoi termini equimultiplici di quelli della prima (n.° 132).

136. *Una frazione si riduce a minimi termini, dividendo il*

numeratore ed il denominatore pel loro massimo comun divisore; i rispettivi quozienti che si ottengono saranno i termini della frazione ridotta alla sua più semplice espressione.

Sia da ridursi a minimi termini la frazione $\frac{201}{536}$. Cerchiamo primieramente il massimo comun divisore dei suoi termini (n.° 100), e troveremo che questo è 67; dividiamo poi i due termini della frazione proposta per 67, ed avremo per rispettivi quozienti 3 ed 8; quindi la proposta frazione ridotta a minimi termini viene eguale a $\frac{3}{8}$.

Dim. La frazione proposta non cambia valore, perchè i suoi termini si dividono per lo stesso numero. Inoltre essa si riduce a minimi termini, perchè i suoi termini dividendosi pel massimo comun divisore il quale si compone da tutti i fattori comuni ai medesimi, i termini della frazione risultante non avranno alcun fattore comune, perciò questa frazione è irriducibile.

137. Allorchè il massimo comun divisore dei termini di una frazione è l'unità, la frazione è ***irriducibile***, perchè i suoi termini non hanno fattori comuni. Tal'è p. es. la frazione $\frac{63}{137}$.

138. Alle volte una frazione può ridursi a minimi termini dividendo successivamente i suoi termini per quei fattori comuni che si veggono a colpo d'occhio.

Così p. es. nella frazione $\frac{252}{324}$ scorgendosi che i suoi termini sono ambedue divisibili per 4 e per 9; eseguendo le divisioni essa si riduce alla più semplice espressione $\frac{7}{9}$.

Digitized by Google

ESTRAZIONE DELL'INTERO DA UNA FRAZIONE SPURIA.

139. *Si divide il numeratore pel denominatore, il quoziente sarà l'intero; e la frazione proposta sarà eguale a questo intero più una nuova frazione, che ha per numeratore il resto e per denominatore lo stesso denominatore.*

Sia p. es. la frazione $\frac{28}{7}$ da cui voglia estrarsi l'intero. Dividiamo il numeratore pel denominatore, e si avrà per quoziente esatto 4; dunque la proposta frazione è esattamente eguale a 4.

Sia inoltre la frazione $\frac{51}{8}$ da cui voglia ricavarsi l'intero. Si divida il numeratore pel denominatore, e si avrà per quoziente 6, e per resto 3, perciò la frazione $\frac{51}{8}$ sarà eguale a $6+\frac{3}{8}$.

Dim. La ragione è chiara, perchè ogni frazione equivale al quoziente che si ottiene dividendo il numeratore pel denominatore (n.° 131).

RIDUZIONE DI UN INTERO IN NUMERO FRAZIONARIO CHE ABBIA UN DATO DENOMINATORE.

140. *Si moltiplica l'intero per il dato denominatore, ed il prodotto sarà il numeratore cercato.*

Sia l'intero 15 che voglia ridursi in numero frazionario il quale abbia per denominatore 24. Si moltiplicherà 15 per 24, ed il prodotto 360 sarà il numeratore che si cercava, perciò l'intero 15 verrà eguale al numero frazionario $\frac{360}{24}$.

Dim. In effetti, siccome un' unità è uguale a $\frac{24}{24}$, 15 unità saranno eguali a $\frac{24}{24}$ moltiplicato per 15, il che sappiamo che si fa moltiplicando il numeratore per 15, senza alterare il denominatore; perciò verrà $15 = \frac{24 \times 15}{24}$; dunque lo intero 15 si riduce in 24^{esimi} moltiplicando 15 per 24, e scrivendo sotto al prodotto per denominatore 24.

141. *Ogni numero intero può scriversi sotto forma di frazione che abbia per numeratore l' intero e per denominatore l' unità.*

Così p. es. 12 può scriversi nel seguente modo $\frac{12}{1}$, e si leggerà: *12 diviso per 1.*

Difatti, l' espressione $\frac{12}{1}$ vuol dire che l' unità si è divisa per 1, ossia pel denominatore, ed il quoziente 1 che si ottiene si prende 12 volte, cioè quante volte lo dinota il numeratore. È chiaro poi che la medesima espressione equivale al quoziente che si ottiene dividendo il numeratore 12 pel denominatore 1.

RIDUZIONE DI UN INTERO ED UN FRATTO IN UN SOL NUMERO FRAZIONARIO.

142. *Per ridurre un intero ed un fratto in un sol numero frazionario, si moltiplica l' intero pel denominatore della frazione, al prodotto si aggiunge il numeratore, e sotto la somma si scrive per denominatore quello della medesima frazione* (*).

(*) Questa operazione si enuncia anche così: *mettere sotto forma frazionaria un intero ed un fratto.* E la regola per eseguirla può anche

Sia l'intero 9 e la frazione $\frac{5}{7}$ che vogliansi ridurre in un sol numero frazionario. Si moltiplichi 9 per 7, ed al prodotto 63 si aggiunga il numeratore 5, e si avrà per somma 68; poi sotto questa somma si scriva per denominatore lo stesso denominatore 7 della data frazione, ed il numero frazionario $\frac{68}{7}$ che ne risulta sarà quello cercato.

Dim. Dovendosi unire l'intero 9 alla frazione $\frac{5}{7}$ per farne un sol numero frazionario, convertiamo l'intero 9 in *settimi*, e poi vi aggiungiamo i $\frac{5}{7}$; ora 9 si converte in *settimi* moltiplicandolo per 7, e viene eguale a 63 *settimi*, e siccome vi dobbiamo aggiungere $\frac{5}{7}$, uniremo il numeratore 5 al prodotto 63 e si avranno 68 *settimi;* quindi l'intero 9 e la frazione $\frac{5}{7}$ equivalgono al numero frazionario $\frac{68}{7}$.

143. Allorchè la differenza fra un intero ed un fratto si vuole ridurre in un sol numero frazionario, bisogna moltiplicare l'intero pel denominatore, dal prodotto si toglie il numeratore, e sotto al resto si scrive lo stesso denominatore.

Così p. es. volendo ridurre $5-\frac{3}{7}$ ad un sol numero frazionario, si moltiplicherà 5 per 7, e dal prodotto 35 se ne toglie il numeratore 3, e sotto al resto 32 si scriverà il denominatore 7, e si avrà la frazione $\frac{32}{7}$ uguale a $5-\frac{3}{7}$.

La dimostrazione è la stessa del numero precedente, sol che, invece di aggiungere il numeratore, si deve togliere.

---

dirsi con semplicità nel seguente modo. *Si aggiunga al numeratore il prodotto del suo denominatore per l'intero.*

Digitized by Google

RIDUZIONE DI UNA FRAZIONE IN UN' ALTRA DI DIVERSO DENOMINATORE.

144. *Si moltiplichi il numeratore della frazione pel nuovo denominatore, ed il prodotto si divida pel denominatore della frazione data; il quoziente che si ottiene sarà il numeratore della frazione cercata.*

Se la divisione riesce esatta la nuova frazione sarà eguale alla proposta; ma se non viene esatta, ne differisce per una frazione sempre minore di quella che ha per numeratore l'unità, e per denominatore il nuovo denominatore.

Sia p. es. la frazione $\frac{3}{7}$ che voglia ridursi in un' altra avente per denominatore 28. Si moltiplicherà il numeratore 3 per 28, e si avrà per prodotto 84; poi si dividerà 84 pel denominatore 7 della data frazione, e si avrà per quoziente 12; così la frazione $\frac{12}{28}$ che ha per numeratore il quoziente 12 sarà uguale alla proposta.

Dim. La frazione $\frac{3}{7}$ essendo uguale al quoziente che si ottiene dividendo 3 per 7, se riduciamo il numeratore 3 in *ventottesimi*, il che si fa moltiplicando 3 per 28, allora potremo dividere il numero de' *ventottesimi* che ne risulta, e che è 84, per 7; perciò il quoziente 12 che si ottiene esprimerà *ventottesimi*; ma questo quoziente pareggia la frazione proposta, dunque essa è uguale a $\frac{12}{28}$.

Se poi la frazione $\frac{3}{7}$ voglia convertirsi in 20^{mi}; in questo caso il prodotto di 3 pel nuovo denominatore 20, che è 60, non è divisibile pel denominatore 7 della frazione da-

ta; quindi nè conchiudiamo che la data frazione non è convertibile esattamente in 20^{mi}; ma essa essendo eguale a 60 *ventesimi* da dividersi per 7, eseguendo la divisione, risulta eguale ad *8 ventesimi*, e vi restano altri 4 ventesimi da dividersi per 7 che fanno $\frac{4}{7}$ di $\frac{1}{20}$. Perciò in tal caso la frazione $\frac{3}{7}$ viene eguale ad $\frac{8}{20}+\frac{4}{7}$ di $\frac{1}{20}$;

Trascurando la parte $\frac{4}{7}$ di $\frac{1}{20}$ che è minore di un *ventesimo*, si avrà *prossimamente* $\frac{3}{7}=\frac{8}{20}$, differendosi dal vero per meno di un *ventesimo* dell' unità, che è quello che si voleva; perchè quando vogliamo ridurre la frazione in *ventesimi*, è segno che possiamo trascurare le parti dell' unità inferiori ad un *ventesimo*.

Il vero errore poi è $\frac{4}{7}$ di $\frac{1}{20}$, ossia $\frac{4}{140}$, ossia $\frac{1}{35}$.

Da quanto si è detto si desume che la condizione affinchè una frazione possa ridursi esattamente in altra di dato denominatore, si è che, il dato denominatore sia multiplo di quello della frazione, ovvero che il prodotto del dato numeratore pel nuovo denominatore abbia tra suoi fattori tutti quelli del denominatore della frazione data.

RIDUZIONE DELLE FRAZIONI AL MEDESIMO DENOMINATORE.

145. *Più frazioni si riducono al medesimo denominatore, senza cambiar valore, moltiplicando i termini di ciascuna pel prodotto de' denominatori di tutte le altre.*

Sieno le frazioni $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{4}{7}$, che vogliansi ridurre al medesimo denominatore.

Moltiplicando i termini della prima pel prodotto 5×7 dei denominatori delle altre due, e quelli della seconda pel prodotto 4×7, e quelli della terza pel prodotto 4×5, si avranno così le seguenti frazioni

$$\frac{3\times5\times7}{4\times5\times7}, \quad \frac{2\times4\times7}{5\times4\times7}, \quad \frac{4\times4\times5}{7\times4\times5};$$

ed effettuando le operazioni indicate, si ridurranno alle frazioni $\frac{105}{140}$, $\frac{56}{140}$, $\frac{30}{140}$, le quali hanno tutte lo stesso denominatore, e sono rispettivamente uguali alle proposte.

Dim. In effetti, le proposte frazioni non cambiano valore, perchè i termini di ciascuna vengono a moltiplicarsi ambedue per lo stesso numero; inoltre esse riduconsi al medesimo denominatore, perchè il denominatore di ognuna si forma dal prodotto de' denominatori di tutte le frazioni, e questo prodotto è sempre lo stesso, comunque si permuti l' ordine di moltiplicazione de' suoi fattori (n.° 53).

146. Prima di ridurre le frazioni al medesimo denominatore conviene sempre osservare se il denominatore maggiore fosse divisibile pel minore; perchè allora si riducono ad avere per comun denominatore il maggiore, dividendo questo pel minore, e moltiplicando i termini della frazione che ha il denominatore minore pel quoziente; così questa frazione acquista per denominatore il maggiore; perchè il suo denominatore, che ha fatto da divisore, moltiplicato pel quoziente, dà per prodotto il denominator maggiore che ha fatto da dividendo.

Così p. es. avendosi le frazioni $\frac{5}{18}$ e $\frac{7}{9}$, in cui il denomi-

natore maggiore 18 si può dividere pel minore 9 e dà per quoziente 2; moltiplicheremo i termini della frazione $\frac{7}{9}$ per 2, ed essa si riduce a $\frac{14}{18}$, acquistando il medesimo denominatore dell' altra.

147. Le frazioni possono ridursi ad un comun denominatore che sia multiplo comune dei loro denominatori, e che perciò potrebbe essere più picciolo di quello dato dalla regola generale, il quale si forma dal prodotto di tutti i loro denominatori. Ecco la regola per eseguire questa riduzione.

Più frazioni si riducono ad avere per comun denominatore un multiplo comune dei loro denominatori, dividendo questo multiplo per il denominatore di ciascuna frazione, e poi moltiplicando i termini della frazione pel quoziente.

Così avendosi le frazioni $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{6}$, in cui vediamo che 12 è multiplo comune dei loro denominatori; le ridurremo ad avere per comun denominatore 12, dividendo 12 per 3, per 4, per 2, e per 6; e moltiplicando i termini di ciascuna frazione pel rispettivo quoziente; cioè quelli della prima per 4, quelli della seconda per 3, quelli della terza per 6, e quelli della quarta per 2. E così si avranno le frazioni $\frac{8}{12}$, $\frac{9}{12}$, $\frac{6}{12}$, $\frac{10}{12}$ ridotte al comun denominatore 12.

È da osservarsi che basta moltiplicare i soli numeratori per i rispettivi quozienti, perchè si sa che il comun denominatore è il multiplo comune. Difatti, il quoziente moltiplicato pel divisore, che è il denominatore, deve dare per prodotto il dividendo, che è il multiplo comune.

Sieno ora le frazioni $\frac{23}{1176}$, $\frac{17}{5400}$, $\frac{61}{6237}$ che vogliońsi

ridurre ad avere per comun denominatore il minimo multiplo dei loro denominatori. Troveremo prima questo minimo multiplo che è $2^3.3^4.5^2.7^2.11=8731800$, e riducendole ad avere per comun denominatore questo minimo multiplo, verranno eguali a $\frac{170775}{8731800}$, $\frac{27489}{8731800}$, $\frac{85400}{8731800}$.

Facciamo osservare che nel dividere il minimo multiplo per il denominatore, queste divisioni possono farsi supprimendo da esso i fattori dei denominatori $2^3.3.7^2$, $2^3.3^3.5^2$, $3^4.7.11$, essendo i detti fattori tutti messi in evidenza.

Così nel nostro esempio sopprimendo successivamente dal minimo multiplo, che è $2^3.3^4.5^2.7^2.11$, i fattori di ciascun denominatore, si hanno per rispettivi quozienti $2^3.5^2.11=7425$, $3.7^2.11=1617$, $2^3.5^2.7=1400$; e poi moltiplicando i numeratori rispettivamente per questi quozienti, si avranno le frazioni di sopra.

148. Passiamo ora ad esporre la regola per ridurre più frazioni al minimo comun denominatore.

Per ridurre più frazioni al minimo comun denominatore si rendono prima irriducibili, e poi si riducono ad avere per comun denominatore il minimo multiplo dei loro denominatori.

In effetti, se potesse esservi altro comun denominatore più picciolo, le frazioni che hanno questo denominatore comune essendo equivalenti alle date, che si sono rese irriducibili, il denominatore comune sarebbe multiplo dei denominatori delle date (n.° 132); ma un multiplo comune di più numeri è multiplo del minimo multiplo (120); dunque questo preteso comun denominatore più picciolo sarebbe multiplo del minimo multiplo; perciò non sarebbe minore di quel denominatore che è uguale al minimo multiplo.

149. Per conoscere di due frazioni qual' è la maggiore basta ridurle al medesimo denominatore; e sarà maggiore quella che ha il numeratore maggiore, perchè in essa si prendono più parti dell' unità.

Molte volte si conosce a colpo d' occhio quale di due frazioni è maggiore; ed è maggiore quella che ha il denominatore minore, se il suo numeratore è maggiore o eguale a quello dell' altra; poichè esprime più

parti, o tante parti dell' unità, quante ne esprime l' altra; ma sono più grandi, perchè l' unità è divisa in un numero minore di parti.

Se in una frazione il numeratore è più della metà del suo denominatore, e nell' altra è meno della unità; la prima frazione è maggiore della seconda; perchè la prima è maggiore di un mezzo, mentre l' altra n' è minore.

Addizione delle frazioni.

150. *Se le frazioni date hanno lo stesso denominatore, si addizionano i loro numeratori, e sotto la somma si scrive per denominatore il denominator comune. Se poi hanno denominatori differenti, si ridurranno prima al medesimo denominatore, e poi se ne fa l' addizione.*

Sieno p. e. da addizionarsi le frazioni $\frac{3}{11}$, $\frac{5}{11}$, $\frac{2}{11}$, le quali hanno lo stesso denominatore. Addizionando i loro numeratori, si avrà per somma 10, e scrivendo sotto a 10 per denominatore 11, si avrà la frazione $\frac{10}{11}$; laonde $\frac{10}{11}$ sarà la somma delle frazioni proposte.

Sieno poi da addizionarsi più frazioni che hanno denominatori differenti, come sono p. es. le frazioni $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{5}{8}$.

Riducendole prima al medesimo denominatore esse diverranno rispettivamente uguali alle tre seguenti

$$\frac{168}{280}, \quad \frac{80}{280}, \quad \frac{175}{280},$$

le quali addizionandosi come quelle che hanno lo stesso denominatore, la somma sarà $\frac{423}{280} = 1\frac{143}{280}$.

Dim. Ragionando sul primo esempio: È manifesto che do-

vendosi addizionare le frazioni $\frac{3}{11}$, $\frac{5}{11}$, $\frac{2}{11}$, la loro somma deve contenere tanti undicesimi quanti ne contengono le frazioni date, cioè deve contenerne $3+5+2$, ossia 10; quindi la frazione $\frac{10}{11}$, che contiene tanti undicesimi quanti ne contengono tutte le frazioni date, sarà la loro somma. Similmente si ragiona sul secondo esempio, e su di ogni altro.

La ragione per cui le frazioni date debbonsi ridurre al medesimo denominatore è la seguente. La frazione unica eguale alla loro somma dovendo comporsi di parti eguali dell' unità, cioè di parti espresse dal medesimo denominatore, il solo mezzo che vediamo di poter formare questa frazione unica, si è di ridurre le frazioni date al medesimo denominatore; perchè poi addizionando i loro numeratori, si avrà una frazione equivalente alla loro somma.

151. Se tra le frazioni date ad addizionare si trovassero alcune del medesimo denominatore, ovvero tali da potersi ridurre brevemente ad un comun denominatore più semplice di quello che si ottiene col metodo generale; allora riesce utile far prima la somma di queste frazioni, e poi questa somma si addizionerà con le rimanenti.

Così dovendosi eseguire la seguente addizione

$$\frac{2}{3}+\frac{5}{9}+\frac{7}{8}+\frac{4}{5}+\frac{3}{8};$$

osserviamo che le due prime frazioni possono tosto ridursi al medesimo denominatore moltiplicando i due termini della prima per 3, faremo perciò una tal riduzione, e poi le sommeremo, e si avrà per somma $\frac{11}{9}=1\frac{2}{9}$. Inoltre osservando che le due frazioni $\frac{7}{8}$ e $\frac{3}{8}$ hanno già lo stesso deno-

minatore, la loro somma sarà $\frac{10}{8} = 1\frac{1}{4}$. Dunque l'addizione delle frazioni date si riduce a quella dei numeri $2, \frac{2}{9}, \frac{1}{4}, \frac{4}{5}$, la quale effettuandosi, si avrà per somma

$$2 + \frac{40+45+144}{180} = 2\frac{229}{180} = 1\frac{49}{180}.$$

152. *Allorchè debbono addizionarsi frazioni accompagnate da numeri interi, si addizioneranno le frazioni separatamente dagli interi; e se la somma delle frazioni risultasse spuria, se n'estrarrà l'intero per unirlo alla somma degl'interi.*

Sia p. es. da eseguirsi l'addizione

$$13 + \frac{2}{3} + 7\frac{3}{5} + 16\frac{1}{2}.$$

Riduciamo prima le frazioni al medesimo denominatore per addizionarle, e la somma sarà

$$\frac{20+18+15}{30} = \frac{53}{30} = 1\frac{23}{30};$$

ed addizionando l'intero 1 con gl'interi 13, 7, e 16, e scrivendo affianco al risultato la frazione $\frac{23}{30}$, si avrà la somma cercata che sarà $37\frac{23}{30}$.

Sottrazione delle frazioni.

153. *Se le frazioni date hanno il medesimo denominatore, si toglierà il numeratore dal numeratore, e sotto al resto si scriverà per denominatore il denominator comune; se poi hanno denominatori differenti, si ridurranno prima al medesimo denominatore, ed indi si farà la sottrazione.*

Digitized by Google

Sia p. es. la frazione $\frac{5}{8}$ che debba togliersi dall' altra $\frac{7}{8}$, la quale ha lo stesso denominatore. Togliamo dal numeratore 7 il numeratore 5, e si ha per resto 2; scriviamo sotto a 2 il denominatore 8, e si ha la frazione $\frac{2}{8}$ la quale sarà il resto cercato.

Sia ora la frazione $\frac{3}{5}$ che debba sottrarsi dall' altra $\frac{8}{9}$ di diverso denominatore. Riducendo queste due frazioni al medesimo denominatore, si avrà che $\frac{8}{9}-\frac{3}{5}=\frac{40}{45}-\frac{27}{45}$; ed eseguendo la sottrazione come per le frazioni che hanno lo stesso denominatore, si troverà che $\frac{8}{9}-\frac{3}{5}=\frac{13}{45}$.

Dim. Ragionando sul primo esempio: È manifesto che dovendosi togliere 5 *ottavi* da 7 *ottavi* debbono rimanervi tanti *ottavi* quanti ne dinota l'eccesso di 7 su 5, che è 2; quindi la frazione $\frac{2}{8}$ sarà il resto che si cercava. Similmente si ragiona sul secondo esempio, e su qualunque altro.

Se avviene che dopo aver ridotte le frazioni al medesimo denominatore, il numeratore della frazione da sottrarsi sia maggiore di quello dell' altra; allora la frazione da togliersi essendo maggiore di quella da cui deve togliersi, la sottrazione non può eseguirsi.

154. *Allorchè un intero ed una frazione deve sottrarsi da un intero accompagnato da una frazione, si toglierà la frazione dalla frazione, e l'intero dall' intero. E se la frazione da togliersi è maggiore dell' altra, questa si fa imprestare un unità dall' intero che l'accompagna riducendo l'unità e la frazione in una sola frazione, e poi si esegue la sottrazione.*

Digitized by Google

Sia $8\frac{3}{7}$ che deve togliersi da $12\frac{7}{8}$: si avrà

$$12\frac{7}{8}-8\frac{3}{7}=12\frac{49}{56}-8\frac{24}{56}=4\frac{25}{56}.$$

Sia ora $8\frac{7}{8}$ che deve togliersi da $12\frac{3}{7}$: si avrà

$$12\frac{3}{7}-8\frac{7}{8}=12\frac{24}{56}-8\frac{49}{56}=11\frac{80}{56}-8\frac{49}{56}=3\frac{31}{56}.$$

Nella pratica, dopo addizionato il numeratore 24 della frazione scritta affianco a 12 col suo denominatore 56, sotto la somma 80 si scrive il numeratore 49 che si sottrae da essa, e così si ottiene il numeratore 31 della frazione residuale.

155. Se da un intero deve togliersi una frazione; un'unità dell'intero si scrive sotto forma di frazione che abbia lo stesso denominatore della frazione data, e poi da quest'unità così scritta si toglie la data frazione, il che si riduce a togliere il numeratore dal denominatore, ed il resto sarà il numeratore della frazione residuale, la quale si scriverà affianco all'intero diminuito di un'unità.

Così p. es. $9-\frac{4}{7}=8+\frac{7}{7}-\frac{4}{7}=8\frac{3}{7}$.

Moltiplicazione delle frazioni.

156. Occorrendo spesso prendere una certa parte di un numero p. es. i $\frac{3}{4}$, il risultato, che è i $\frac{3}{4}$ del numero dato, si forma per mezzo di questo numero della stessa guisa che $\frac{3}{4}$ si forma per mezzo dell'unità. Dunque in tal caso si fa un'operazione simile a quella che si fa nella moltiplica-

zione degl'interi, in cui il prodotto si forma per mezzo del moltiplicando della stessa maniera che il moltiplicatore si forma per mezzo dell'unità. Ecco perchè quando di un numero bisogna prendere una certa parte, p. e. i $\frac{3}{4}$, chiamiamo questa operazione *moltiplicazione*, e diciamo che il numero si moltiplica per $\frac{3}{4}$. Perciò possiamo dare una definizione più generale della moltiplicazione, che convenga tanto agl'interi quanto alle frazioni: diremo dunque che:

La *moltiplicazione* è quell'operazione in cui essendo dati due numeri, se ne vuol trovare un terzo il quale si componga per mezzo di uno dei due dati, chiamato *moltiplicando*, della stessa guisa che l'altro, chiamato *moltiplicatore*, si compone per mezzo dell'unità.

Così p. es. volendosi moltiplicare un numero per 8, vuol dire che convien trovare un terzo numero, il quale si componga dal moltiplicando preso 8 volte, come il moltiplicatore si compone dall'unità presa 8 volte. E volendosi moltiplicare un numero per $\frac{4}{5}$, vuol dire che il prodotto deve essere i $\frac{4}{5}$ del moltiplicando, come il moltiplicatore è i $\frac{4}{5}$ dell'unità. Dunque, moltiplicare un numero per $\frac{4}{5}$, vuol dire che si debbono prendere i $\frac{4}{5}$ del moltiplicando. E perciò quando il moltiplicatore è una frazione vera, il prodotto è minore del moltiplicando, il che non avviene quando il moltiplicatore è intero, o frazione spuria.

157. Nella moltiplicazione delle frazioni due sono i casi principali; uno è quello di moltiplicare una frazione per un intero, l'altro è quello di moltiplicare un numero qualun-

que per un fratto; ma questo secondo caso lo distingueremo in due, cioè in quello di un fratto per un fratto, e in quello di un intero per un fratto, e così ridurremo la moltiplicazione ai tre seguenti casi.

1.° Caso. *Una frazione si moltiplica per un intero moltiplicando il numeratore per l' intero.*

Sia per es. la frazione $\frac{9}{11}$ da moltiplicarsi per 4. Moltiplicheremo il numeratore per 4, ed avremo la frazione $\frac{36}{11}$ che sarà il prodotto cercato.

Difatti, si sa dalle proprietà delle frazioni che se il numeratore di una frazione si moltiplica per un numero, la frazione si moltiplicherà per lo stesso numero.

Avvertimento. Una frazione si moltiplica anche per un intero, dividendo, quando si può, il suo denominatore per l' intero; ed in questa seconda maniera si giunge ad un risultato più semplice. Così p. es. se la frazione $\frac{7}{12}$ dovesse moltiplicarsi per 3; ciò può farsi dividendo il suo denominatore per 3, e si ha per prodotto la frazione $\frac{7}{4}$. In effetti, sappiamo dalle proprietà delle frazioni che una frazione si moltiplica per un intero, dividendo il denominate per l' intero.

2.° Caso. *Due frazioni si moltiplicano fra loro, moltiplicando i numeratori fra loro ed i denominatori fra loro, e dividendo il primo prodotto pel secondo.*

Sia p. es. la frazione $\frac{3}{7}$ da moltiplicarsi per l' altra $\frac{4}{5}$. Moltiplicando i numeratori fra loro ed i denominatori fra loro si ottiene il prodotto cercato, che è la frazione $\frac{12}{35}$.

Digitized by Google

Dim. Dovendo moltiplicarsi $\frac{3}{7}$ per $\frac{4}{5}$, vuol dire che si debbono prendere i $\frac{4}{5}$ di $\frac{3}{7}$; cioè si deve prendere prima la quinta parte di $\frac{3}{7}$ e poi deve ripetersi 4 volte, ma la quinta parte di $\frac{3}{7}$ si ottiene moltiplicando il denominatore per per 5, perciò essa è $\frac{3}{7\times5}$, e questa quinta parte si ripete 4 volte moltiplicando il numeratore per 4; perciò il prodotto sarà $\frac{3\times4}{7\times5}=\frac{12}{35}$: quindi esso si ottiene moltiplicando i numeratori fra loro ed i denominatori fra loro, e dividendo il primo pel secondo prodotto.

3.° Caso. *Un intero si moltiplica per una frazione moltiplicando l' intero pel numeratore, rimanendo lo stesso il denominatore.*

Sia l'intero 8 da moltiplicarsi per $\frac{4}{11}$. Moltiplichiamo l'intero 8 pel numeratore 4, e si avrà il cercato prodotto che è $\frac{32}{11}$.

Dim. Scrivendo l' intero 8 sotto forma frazionaria avente per denominatore l' unità, l' operazione si riduce a moltiplicare la frazione $\frac{8}{1}$ per l' altra $\frac{4}{11}$, e si ha per prodotto $\frac{8\times4}{11}=\frac{32}{11}$; perciò il prodotto si ottiene moltiplicando l' intero per il numeratore.

Senza scrivere l' intero 8 sotto forma frazionaria avente per denominatore l' unità, si potrebbe applicare lo stesso ragionamento precedente.

158. *Un intero ed un fratto si moltiplica per un intero ed un fratto, riducendo ciascun intero col fratto che l' accompa-*

gna in un sol numero frazionario , e poi si esegue la moltiplicazione.

Così dovendosi moltiplicare $8\frac{3}{4}$ per $5\frac{2}{7}$; riducendo $8\frac{3}{4}$ in un sol numero frazionario, ne verrà $\frac{35}{4}$; e riducendo similmente $5\frac{2}{7}$, ne verrà $\frac{37}{7}$: laonde l'operazione si riduce a dover moltiplicare la frazione $\frac{35}{4}$ per l'altra $\frac{37}{7}$, il che effettuandosi, si ottiene per prodotto $\frac{1295}{28} = 46\frac{7}{28} = 46\,{}^1/_4$.

Se poi uno solo de' fattori fosse un intero accompagnato da un fratto, e l'altro fosse soltanto intero; allora riesce meglio far la moltiplicazione *per parti*.

Così p. es. dovendo moltiplicarsi $7\frac{3}{5}$ per 8; si moltiplicherà prima la parte 7 del moltiplicando per 8, e si avrà per prodotto 56; poi si moltiplicherà l'altra parte $\frac{3}{5}$ per 8, e si avrà il prodotto $\frac{24}{5} = 4\frac{4}{5}$; indi si farà la somma di questi prodotti parziali e si otterrà il prodotto totale che sarà

$$56 + 4\frac{4}{5} = 60\frac{4}{5}.$$

159. La moltiplicazione per parti può anche farsi quando ambedue i fattori sono interi accompagnati da frazioni; ma il calcolo riesce più complicato. Così dovendo moltiplicarsi $8\frac{3}{4}$ per $5\frac{2}{7}$, si moltiplica

prima il moltiplicando per la parte intera 5 del moltiplicatore, e poi per la parte fratta $\frac{2}{7}$; ed il prodotto sarà

$$8\times5+\frac{3}{4}\times5+8\times\frac{2}{7}+\frac{3}{4}\times\frac{2}{7}=40+\frac{15}{4}+\frac{16}{7}+\frac{6}{28}=46\,{}^{1}/_{4}.$$

OSSERVAZIONI SULLA MOLTIPLICAZIONE DELLE FRAZIONI.

160. I teoremi dimostrati (n. 53 e 54) rispetto agl' interi possono ora estendersi a due numeri qualsivogliono, e ne concluderemo in generale che:

1.° *Il prodotto di più fattori non cambia, comunque s' inverta l' ordine de' fattori.*

2.° *Per moltiplicare un numero pel prodotto di più fattori, basta moltiplicarlo successivamente per ciascuno di questi fattori.*

Dim. Difatti, riducendo ciascuno dei fattori a numero frazionario, l' operazione si riduce a dover formare il prodotto de' loro numeratori e quello de' loro denominatori, i quali essendo prodotti di numeri interi, valgono rispetto ad essi le enunciate verità.

161. Essendosi veduto che se si vogliono prendere i $\frac{5}{9}$ di $\frac{3}{8}$ equivale a dire che la seconda frazione deve moltiplicarsi per la prima; e poichè il risultato $\frac{15}{72}$ è una *frazione di frazione* ne segue che

Una frazione di frazione si riduce ad una sola frazione moltiplicando fra loro le frazioni date.

Ora, se della frazione $\frac{15}{72}$, la quale è i $\frac{5}{9}$ di $\frac{3}{8}$, si volesse di nuovo prendere una frazione, p. es. i $\frac{2}{3}$, il risultato $\frac{30}{216}$ sarà i due terzi dei cinque noni di tre ottavi, cioè sarà una frazione di frazione ridotta ad una sola frazione; e si vede che per potersi ottenere bisogna moltiplicare le tre frazioni fra loro.

Similmente si procederebbe se le frazioni fossero più di tre.

162. Allorchè si moltiplicano più frazioni fra loro, è utile lasciar prima accennate le moltiplicazioni nel numeratore e nel denominatore del

Digitized by Google

prodotto cercato; poichè spesso accade che veggonsi a colpo d'occhio i fattori comuni, i quali supprimendosi, si perviene brevemente ad un risultato più semplice. Così p. es. dovendosi fare il prodotto delle tre frazioni $\frac{8}{15}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{7}{12}$; lasciando in principio accennate le moltiplicazioni nel numeratore e nel denominatore, il prodotto sarà $\frac{8\times3\times7}{15\times7\times12}$, e supprimendo i fattori comuni 3, 4, e 7 al numeratore ed al denominatore, il cercato prodotto si riduce a $\frac{2}{15}$, che è più semplice dell'altro $\frac{168}{1260}$ il quale si otterrebbe senza sopprimere i fattori comuni.

Divisione delle frazioni.

163. La divisione delle frazioni, come si disse per gl'interi, è quell'operazione in cui essendo dato un prodotto ed un fattore, si cerca l'altro fattore.

Non pertanto allorchè il divisore è una frazione non può aversi in mira di dividere il dividendo in parti eguali, e perciò il quoziente non denota una delle parti eguali in cui si divide il dividendo, ma esprime quanto è il dividendo rispetto al divisore, cioè come il dividendo si compone per mezzo del divisore. Così, se il quoziente è $\frac{3}{5}$, vuol dire che il divisore moltiplicato per $\frac{3}{5}$ deve dare il dividendo. Dunque il dividendo è i $\frac{3}{5}$ del divisore, cioè si compone dai $\frac{3}{5}$ del divisore.

164. Due sono i casi principali della divisione delle frazioni; uno è quello in cui il dividendo è fratto ed il divisore è intero; l'altro è quello in cui il divisore è fratto, qualunque sia il dividendo.

1.° Caso. *Una frazione si divide per un intero moltiplicando il denominatore per l'intero, rimanendo intatto il numeratore.*

Sia p. es. la frazione $\frac{4}{9}$ da dividersi per 7. Moltiplicheremo il denominatore per 7, e si avrà la frazione $\frac{4}{63}$ che è il quoziente cercato.

Difatti, sappiamo dalle proprietà delle frazioni che una frazione si divide per un intero moltiplicando il denominatore per l' intero.

Avvertimento: Una frazione può anche dividersi per un intero, dividendo, quando si può, il numeratore per l'intero; ed in questa seconda maniera, che non è sempre possibile, si giunge ad un risultato più semplice.

Così p. es. volendosi dividere la frazione $\frac{12}{13}$ per 6; osservando che il numeratore è divisibile per 6, si dividerà per 6, e si avrà la frazione $\frac{2}{13}$ che sarà il quoziente cercato.

Infatti, sappiamo dalle proprietà delle frazioni che una frazione si divide per un intero, dividendo il numeratore per intero.

2.° Caso. *Un numero intero o fratto si divide per un fratto, moltiplicando il dividendo pel divisore capovolto.*

Sia la frazione $\frac{4}{9}$ da dividersi per la frazione $\frac{3}{5}$. Moltiplichiamo il dividendo per $\frac{5}{3}$, che è il divisore capovolto, e si avrà per risultato $\frac{20}{27}$ che sarà il quoziente cercato.

Dim. Siccome il quoziente ignoto moltiplicato pel divisore $\frac{3}{5}$ deve dare il dividendo, ne segue che il dividendo è i $\frac{3}{5}$ del quoziente ignoto; perciò se lo dividiamo per 3, il che sappiamo che si fa moltiplicando il denominatore per 3, il

risultato $\frac{4}{9\times3}$ sarà $\frac{1}{5}$ del quoziente ignoto; adunque se moltiplichiamo questo risultato per 5, si avrà il quoziente che si cerca, che sarà $\frac{4\times5}{9\times3}$: perciò esso si ottiene moltiplicando il dividendo per il divisore rovesciato (*).

Sia ora l'intero 7 da dividersi per $\frac{5}{9}$. Moltiplichiamo l'intero 7 per $\frac{9}{5}$ che è il divisore rovesciato, e si avrà per risultato $\frac{63}{5} = 12\frac{3}{5}$ che sarà il quoziente cercato.

Difatti, scrivendo il dividendo 7 sotto forma frazionaria avente per denominatore l'unità, l'operazione si riduce a dividere $\frac{7}{1}$ per $\frac{5}{9}$, e quindi il quoziente sarà $\frac{7\times9}{5}$; cioè si ottiene moltiplicando il dividendo per il divisore capovolto.

Senza scrivere l'intero 8 sotto forma frazionaria avente per denominatore l'unità, si potrebbe applicare lo stesso ragionamento precedente.

(*) La stessa cosa si dimostra nel seguente modo.

Siccome il divisore $\frac{3}{5}$ equivale alla quinta parte di 3; se dividiamo la frazione $\frac{4}{9}$ per 3, veniamo a dividerla per un numero 5 volte maggiore; dunque il quoziente, che è $\frac{4}{9\times3}$, sarà 5 volte minore del vero: perciò si avrà il vero quoziente moltiplicando quello ottenuto per 5, il che sappiamo che si fa moltiplicando il numeratore per 5; quindi il quoziente cercato è $\frac{4\times5}{9\times3}$; dunque esso si ottiene moltiplicando il dividendo pel divisore capovolto.

GENERALIZZAZIONE DEI TEOREMI RELATIVI ALLA DIVISIONE.

165. Passiamo ora a dimostrare alcuni teoremi relativi alla divisione nel caso in cui il dividendo ed il divisore sono numeri qualsivogliano; mentre pel caso in cui sono interi, le analoghe dimostrazioni sono quelle dei numeri 128 e 129, per essere ogni frazione eguale al quoziente che si ottiene dividendo il numeratore pel denominatore.

Osserviamo primieramente che qualunque sia il dividendo ed il divisore, possiamo sempre ridurli in numeri frazionari aventi il numeratore ed il denominatore intero; e perciò a questi numeri applicheremo la dimostrazione.

I. *Se il dividendo si moltiplica per un numero, e poi si esegue la divisione, il nuovo quoziente sarà uguale al primo moltiplicato per lo stesso numero.*

Perchè il nuovo quoziente si ottiene moltiplicando lo stesso divisore capovolto non solo pel dividendo primitivo, ma anche pel detto numero, perciò viene eguale al primo quoziente moltiplicato pel medesimo numero.

Quando poi il dividendo si divide per un numero, il nuovo quoziente viene eguale al medesimo divisore capovolto, moltiplicato non solo pel dividendo primitivo ma anche pel detto numero capovolto; perciò viene eguale al primo quoziente diviso per questo numero.

II. *Se il divisore si moltiplica o divide per un numero, e poi si esegue la divisione, il nuovo quoziente sarà eguale al primo rispettivamente diviso o moltiplicato per lo stesso numero.*

Perchè quando il divisore si moltiplica per un numero, il nuovo quoziente si ottiene moltiplicando lo stesso dividendo non solo per lo stesso divisore capovolto, ma anche pel detto numero capovolto; quindi viene eguale al primo quoziente diviso per questo numero.

Quando poi il divisore si divide per un numero, il nuovo quoziente viene eguale al medesimo dividendo moltiplicato non solo pel medesimo divisore capovolto, ma anche per il detto numero; perciò viene eguale al quoziente primitivo moltiplicato pel medesimo numero.

III. *Se il dividendo ed il divisore si moltiplicano per lo stesso numero il quoziente non si altera.*

Perchè moltiplicando il dividendo, il quoziente si moltiplica, e moltiplicando il divisore, il quoziente si divide per lo stesso numero; quindi un' operazione distruggendo l' altra, il quoziente non cambia.

Esercizii di problemi.

166. Si presentano spesso alcune questioni in cui entrano tre grandezze, cioè il valore di una unità, il valore di un certo numero di unità, ed il numero di queste unità.

In queste questioni si può sempre trovare la terza grandezza quando si conoscono le altre due; poichè il valore delle unità è un prodotto, i cui fattori sono il valore della sola unità, ed il numero delle unità, come ora passiamo a dimostrare.

Abbiansi p. es. libbre 15 $^3/_4$ di argento, ed il valore di una libbra sia lire 72 $^1/_2$: dico che il valore di tutte le libbre si ottiene moltiplicando 72 $^1/_2$ per 15 $^3/_4$. In effetti, è chiaro che il prezzo di 15 libbre si ottiene moltiplicando il prezzo di una libbra per 15, ed il prezzo di $^3/_4$ di libbra si ottiene prendendo i $^3/_4$ del prezzo di una libbra, cioè moltiplicando 72 $^1/_2$ per $^3/_4$; e così il prezzo di libbre 15 $^3/_4$ si otterrà moltiplicando 72 $^1/_2$ per 15 $^3/_4$.

Or poichè quando si conoscono i fattori, si trova il prodotto moltiplicando i fattori; e quando si conosce il prodotto ed un fattore, si trova l'altro fattore dividendo il prodotto pel fattore noto; possiamo stabilire le seguenti regole.

1.° *Allorchè si conosce il valore di un' unità, si ottiene quello di un certo numero di unità moltiplicando il valore della unità per il numero delle unità.*

2.° *Allorchè si conosce il valore di un certo numero di unità ed il*

numero di queste unità, si ottiene il valore di una sola unità dividendo il valore di tutte le unità per il numero delle unità.

3.° *Allorchè si conosce il valore di un certo numero di unità, e quello di una sola unità, si ottiene il numero delle unità dividendo il valore di tutte le unità pel valore della sola unità.*

Ciò premesso, passiamo a risolvere i seguenti problemi.

I. Si sono comprate tre balle di cotone, una di libbre 95 $^1/_2$, l'altra di libbre 120 $^3/_4$, l'altra di libbre 136 $^2/_3$. Si domanda la totalità del cotone comprato ed il suo prezzo, conoscendosi che quello di una libbra è $^3/_4$ di lira.

II. Un negoziante ha comprato botti 25 $^2/_3$ di olio, al prezzo di lire 720 la botte; ha poi venduto botti 11 $^3/_4$ al prezzo di lire 760 $^1/_2$ l'una, e le rimanenti le ha vendute al prezzo di lire 705 la botte. Si domanda se vi è stata perdita o guadagno, ed a che monta la perdita o il guadagno.

III. Si è comprato un cesto di frutta del peso di chilogrammi 35 $^1/_2$ per distribuirsi a 42 persone; e si è pagato lire 6 $^3/_4$. Si domanda il costo di un chilogrammo di frutta, la quota di ciascuna persona, ed il costo di ciascuna quota.

IV. Quanto costano canne 86 $^3/_8$ di stoffa pagata al prezzo di lire 24 $^1/_2$ la canna; e quanti abiti possono farsi con la detta stoffa, richiedendosi canne 5 $^1/_4$ per ciascun abito; e quanto costa ciascun abito?

V. Si sono comprati metri 58 $^1/_2$, più metri 94 $^1/_4$ di stoffa che si è pagata a lire 42 $^1/_2$ il metro. Se ne vendono metri 60 $^3/_4$ a lire 50 il metro. Si domanda a quanto il metro deve vendersi il resto della mercanzia, affinchè in tutto il negozio si abbia un guadagno di 8000 lire.

VI. La polvere di cannone è composta di tre quarti del suo peso di salnitro, mezzo quarto di carbone, e mezzo quarto di solfo. Qual peso di ciascuna di queste sostanze entra in 18 chilogrammi di polvere?

VII. Due fratelli hanno avuto un' eredità di 8000 lire, con condizione che la parte del secondogenito sia tre quarti di quella del primogenito. Quanto tocca a ciascuno?

Siccome la quarta parte della rata del primogenito presa 4 volte, più altri tre quarti della stessa debbono formare l' intera eredità, ne segue che 7 quarti della rata del primogenito fanno 8000 lire; perciò dividendo 9000 per 7 si avrà un quarto della rata del primogenito, da cui si desumono le due rate incognite.

VIII. Due fontane scorrono in una vasca; una scorrendo sola riempie la vasca in ore 1 $^1/_4$; l'altra scorrendo anche sola la riempie in ore 3

$^2/_3$. Si domanda in quanto tempo riempiranno la vasca scorrendovi ambedue contemporaneamente.

Conviene trovare in un ora che parte della vasca riempie la prima fontana scorrendo sola, ed in un'ora che parte ne riempie la seconda scorrendo anche sola; poi sommando queste due parti si avrà in un'ora che parte riempiono della vasca le due fontane che vi scorrono simultaneamente; e se p. es. riempieno i 7 dodicesimi della vasca in un'ora, ne riempiranno un dodicesimo in un settimo di ora, e quindi riempiranno l'intera vasca in 12 settimi di ora.

IX. Posti gli stessi dati del problema precedente, supponiamo che nel fondo della vasca esista un foro per cui uscendo l'acqua, la vasca piena si vuoterebbe in ore 4 $^1/_2$. Si domanda in quanto tempo si riempie la vasca col foro aperto, scorrendo simultaneamente le due fontane.

Qui conviene trovare in un ora che parte della vasca si vuota per l'apertura del foro; e se p. es. questa parte fosse i $^2/_9$ della vasca, e le due fontane che vi scorrono simultaneamente ne riempiono i $^7/_{12}$, col foro aperto ne riempiranno in un'ora $^7/_{12}$ meno $^2/_9$; dopo ciò si procederà come nel precedente esempio.

X. Una palla elastica risale ai $^3/_4$ dell'altezza da cui è caduta. A quale altezza risalirà dopo aver toccato 3 volte il suolo, essendo la prima volta caduta dall'altezza di metri 2 $^1/_2$?

XI. Una palla elastica, che risale ai $^3/_4$ dell'altezza da cui cadde, dopo aver toccato 4 volte il suolo risale all'altezza di piedi 2 $^2/_3$. Si domanda da quale altezza è caduta la prima volta.

XII. Si è lavorato un campo da 3 coloni. Il terzo ha fatto i $^4/_5$ della fatica de secondo, ed il secondo ha fatto i $^3/_4$ della fatica del primo. Si debbono poi dividere la ricolta, che è stata di ettolitri 82 $^1/_2$. Quanto tocca a ciascuno ?

È chiaro che la parte del secondo deve essere i $^3/_4$ di quella del primo, e la parte del terzo i $^4/_5$ di quella del secondo; perciò la parte del terzo rispetto a quella del primo sarà i $^4/_5$ dei $^3/_4$, ossia i 12 ventesimi, ossia i 3 quinti. Dunque il secondo ed il terzo avranno insieme i $^3/_4$ più i $^3/_5$ della parte del primo, che sommate fanno i $^{27}/_{20}$ della parte del primo. Perciò $^{27}/_{20}$ della rata del primo più la rata stessa del primo debbono formare l'intero ricolto; ma la rata del primo è $^{20}/_{20}$ di sè stessa, dunque $^{27}/_{20}+^{20}/_{20}$ della rata del primo fanno l'intero ricolto; perciò il ricolto è $^{47}/_{20}$ della rata del primo; quindi dividendo 82 $^1/_2$ per 47 si avrà un ventesimo della rata del primo colono, da cui si desumono le tre rate incognite.

CAP. V.

Numeri decimali.

MANIERA DI SCRIVERE E DI LEGGERE I DECIMALI.

167. Della stessa guisa che per rappresentare un numero più grande dell' unità abbiamo diviso il numero in diversi ordini di unità di 10 in 10 volte maggiori, così per rappresentare un numero più picciolo dell' unità possiamo concepir divisa questa unità in parti che sieno di 10 in 10 volte minori, cioè possiamo concepirla divisa in 10 *decimi*, ed un decimo in dieci parti più picciole che sono i *centesimi*, ed il centesimo in 10 più picciole che sono i *millesimi*, e similmente procedendo.

Si chiama *numero decimale*, ed anche *frazione decimale* quel numero che esprime parti decime, centesime, millesime, ec. dell' unità, cioè parti indicate da numeri le cui cifre sono l' unità seguìta da' zeri.

Dunque: un numero decimale si decompone in diversi ordini di unità, le quali sono di 10 in 10 volte più picciole.

Questi ordini, cominciando da quello dei decimi, sono: *ordine dei decimi*, *ordine dei centesimi*, *ordine dei millesimi*, *ordine dei diecimilesimi*, *ordine dei centomilesimi*, *ordine dei milionesimi*, *ec.*

Si chiama *denominatore* di un numero decimale, quel numero che indica le unità del suo infimo ordine.

Un numero decimale può scriversi della stessa guisa che un numero intero, mettendo la cifra che rappresenta i decimi a dritta di quella che dinota la unità, e la cifra che dinota i centesimi a dritta di quella che dinota i decimi, e

la cifra che dinota i millesimi a dritta di quella de' centesimi e così di seguito; ponendo un zero in quel posto dove mancano le unità di qualche ordine, ed una virgola a dritta della cifra delle unità semplici, per distinguere il posto dove stanno queste unità, ossia dove finisce la *parte intera* e comincia la *parte decimale*. Se poi un numero non contiene parte intera, in sua vece si mette un zero.

Le cifre di un numero decimale, che sono a dritta della virgola diconsi *cifre decimali*.

Ciascuna cifra poi rappresenta *decimi*, *centesimi*, *millesimi*, ec. secondo che occupa il primo, il secondo, il terzo posto, ec. a dritta della cifra delle unità semplici, o della virgola.

Abbiasi p. es. un numero che contenga 94 unità, più 7 decimi, più 3 centesimi, più 8 millesimi; esso si scriverà mettendo una virgola a dritta della cifra 4 delle unità, ed a dritta della virgola si porranno, l' una di seguito all' altra, le cifre dei decimi, dei centesimi, e dei millesimi, che sono 7, 3, 8; si avrà così il numero 94,738 che si leggerà *94738 millesimi*; perchè la prima cifra a dritta rappresenta millesimi, e le altre procedendo verso sinistra, rappresentano unità di 10 in 10 volte più grandi della stessa guisa che in un numero intero.

Parimente un numero che non contiene parte intera, come p. es. 5 decimi, 8 centesimi, *zero* millesimi, e 9 diecimillesimi, si scriverà così, 0,5809; e si leggerà *5809 diecimilesimi*.

Similmente il numero che contiene 8 millesimi e 6 diecimilesimi, senza avere nè parte intera, nè decimi, nè centesimi, si scriverà così 0,0086; e si leggerà: *86 diecimilesimi*.

Ma la maniera ordinaria di enunciare, e di leggere i numeri decimali, si è di enunciare e di leggere separatamente la parte intera dalla parte decimale; perciò il primo numero si leggerà: *94 unità e 738 millesimi*, il secondo si legge-

rà: *zero unità, e 5809 diecimilesimi*, ed il terzo si leggerà: *zero unità, ed 86 diecimilesimi.*

Quando il numero tiene molte cifre decimali, sogliono leggersi le sue cifre a due a due, o a tre a tre. Così p. es. avendosi il numero decimale 364,95273056785; leggendo le sue cifre a tre a tre, si dirà: ***364*** *unità*, ***952*** *millesimi*, ***730*** *milionesimi*, ***567*** *bilionesimi*, ***84*** *centobilionesimi* (*).

Viceversa: un numero esprimente parti decimali che è scritto senza la virgola, si può scrivere con la virgola separando tante cifre decimali dalla sua dritta quanti zeri tiene il denominatore. Così p. es. i numeri 853 centesimi, 24 millesimi, si scrivono con la virgola nel seguente modo 8,53, 0,024, e si leggono: *8 unità e 53 centesimi*, *zero unità e 24 millesimi.*

168. Riassumiamo ora la REGOLA per scrivere un decimale.

Si scrive prima la parte intera, alla sua dritta si pone una virgola, e poi si scrive la parte decimale che deve avere tante cifre quanti sono i zeri del denominatore, e se ne ha meno, quelle mancanti si suppliscono con zeri che si pongono dopo la virgola. Quando poi manca la parte intera, in sua vece si scrive un zero.

169. Avendo veduto che i numeri decimali si possono leggere in due modi, cioè pronunciando la parte intera e la parte decimale separatamente, ovvero leggendo congiuntamente la parte intera e la decimale come se la virgola non vi fosse, ed enunciando infine le unità dell' ordine rappresentato dall' ultima cifra a dritta; ne segue che un numero decimale letto nel primo modo equivale ad un intero più una frazione che ha per numeratore il numero formato

---

(*) Secondo l' antica nomenclatura usata in Italia si leggerà: *364 unità, 952 millesimi, 730 milionesimi, 567 millemilionesimi, 84 centomilamilionesimi.*

dalle sole cifre decimali, e per denominatore l' unità seguita da tanti zeri quante sono le cifre decimali, e letto nel secondo modo equivale ad un numero frazionario che ha lo stesso denominatore, e per numeratore l' intero a cui si riduce tutto il numero decimale sopprimendo la virgola.

Così p. es. i numeri decimali 2,7 e 35,028 equivalgono rispettivamente a $2\frac{7}{10}$ e $35\frac{28}{1000}$.

E i numeri 0,8, e 0,043 equivalgono ad $\frac{8}{10}$ e $\frac{43}{1000}$.

170. Allorchè un intero si vuole ridurre in numero frazionario decimale, può scriversi senza denominatore, mettendo una virgola affianco l'intero, e tanti zeri a dritta di essa quanti ne ha il denominatore. Così p. es. 83 volendosi ridurre in 100^{mi}, viene eguale ad $\frac{8300}{100}$; ma si può scrivere senza denominatore così, 83,00; e si legge *8300 centesimi*.

PROPRIETÀ DEI NUMERI DECIMALI.

171. *Un numero decimale si moltiplica o divide per 10, 100, 1000, ec. trasferendo la virgola di uno, due, tre, ec. posti verso dritta, o verso sinistra.*

Sia il numero 25,479. Trasferendo la virgola di un posto verso dritta, esso diviene 254,79 che è 10 volte maggiore del proposto.

Dim. Difatti, col trasferirsi la virgola di un posto verso dritta, la cifra 9 che dinotava millesimi denota centesimi, che sono unità 10 volte più grandi; e la cifra 7 che dinotava centesimi denota decimi, che sono unità dieci volte più grandi dei centesimi; lo stesso può dirsi delle altre cifre; così tutte le parti del numero proposto essendo divenute 10 volte maggiori, esso si è moltiplicato per 10.

Similmente si dimostra che se la virgola si trasferisce di due, tre, ec. posti verso dritta, il numero si moltiplica per 100, 1000, ec.

172. *Un numero decimale non cambia valore se si aggiungono o si tolgono quanti zeri si vogliono alla sua dritta.*

Sia p. es. il numero decimale 7,68. Aggiungendo due zeri alla sua dritta, diverrà 7,6800 senza che siasi cambiato di valore. Perchè il numeratore ed il denominatore, vengono a moltiplicarsi per lo stesso numero.

Difatti, prima la parte fratta era $\frac{68}{100}$, ed ora è $\frac{6800}{10000}$.

Se poi si sopprimessero zeri dalla dritta, allora il numeratore ed il denominatore vengono a dividersi per lo stesso numero, e perciò non cambia valore.

Può anche dirsi così: Aggiungendo due zeri a dritta del decimale, le cifre decimali esprimono un numero di parti 100 volte maggiore, ma queste parti hanno un valore 100 volte minore, perchè se prima erano centesimi, dopo sono diecimilesimi; perciò il numero non ha cambiato valore.

ADDIZIONE DE' NUMERI DECIMALI.

173. *Si scrivono i numeri dati l'uno sotto l'altro, in modo che i decimi cadano sotto i decimi, i centesimi sotto i centesimi, ec.; poi si addizionano come gl' interi, ponendo la virgola dopo addizionate le cifre dei decimi.*

Sieno da addizionarsi i seguenti numeri decimali 5937,029, 236,5087, 22,09, 0,5876.

Scriveremo questi numeri l'uno sotto l'altro in modo che i decimi cadano sotto i decimi, i centesimi sotto i centesimi, ec. come si scorge quì affianco. Poi si comincia l'addizione dalla prima colonna a dritta, e si dirà, 7 diecimilesimi più 6 diecimilesimi fanno 13

$$\begin{array}{r} 5937,029 \\ 236,5087 \\ 22,09 \\ 0,5876 \\ \hline 6196,2153 \end{array}$$

diecimilesimi; ma poichè 13 diecimilesimi formano 1 millesimo e 3 diecimilesimi, i 3 diecimilesimi si scrivono al di sotto nel posto dei diecimilesimi, ed il millesimo si ritiene per unirlo alla colonna de' millesimi. Poi si passa ad addizionare i numeri della colonna de' millesimi, e si dirà: un millesimo che si porta, più 9 fanno 10, più 8 fanno 18, più 7 fanno 25 millesimi; ma poichè 25 millesimi fanno 2 centesimi e 5 millesimi, i 5 millesimi si scrivono sotto la colonna dei millesimi, e i 2 centesimi si ritengono per unirli alla colonna de' centesimi. Indi si passa ad addizionare la colonna dei centesimi operando similmente, e similmente si prosegue sino all' addizione dell' ultima colonna. In tal modo si troverà per somma il numero 6196,2153.

SOTTRAZIONE DE' NUMERI DECIMALI.

174. *Si scrive il numero minore sotto al maggiore, in modo che i decimi cadano sotto i decimi, i centesimi sotto i centesimi, ec.; poi si esegue la sottrazione come si fa per gl' interi, ponendo la virgola dopo sottratta la cifra dei decimi.*

Se il numero maggiore avesse meno cifre decimali del minore, si aggiungeranno tanti zeri a dritta del primo finchè le sue cifre decimali pareggino quelle del secondo.

Sia p. es. il numero decimale 975,23 da cui debba togliersi l' altro 96,48.

Scriviamo il minore sotto al maggiore in modo che le unità dello stess' ordine sieno situate l'una sotto l' altra, come si vede qui affianco; eseguiamo poi la sottrazione come si fa per gl' interi, cominciando a togliere i centesimi del numero minore da quelli del maggiore, e si dirà: da 3 tolto 8 non si può, perciò la cifra 3 si farà imprestare 1 decimo dalla cifra 2 dei decimi, il quale ridotto in centesimi, ed aggiunto ai 3 centesimi, fa 13 centesimi; quindi si dirà: da 13 tolto 8 resta

$$\begin{array}{r} 975,23 \\ -96,48 \\ \hline 878,75 \end{array}$$

5, che si scrive al di sotto. Similmente si prosegue innanzi, e si troverà per resto il numero 878,75.

175. Sia per secondo esempio da sottrarsi il numero 57,9832 dal numero 86,25. Qui il numero minore avendo più cifre decimali del maggiore, si pareggiano queste cifre aggiungendo zeri a dritta del maggiore, e con ciò sappiamo che il numero non cambia valore. Poi si esegue la sottrazione come si vede quì affianco, e si ottiene per resto il numero 28,2668.

$$\begin{array}{r} 86,2500 \\ 57,9832 \\ \hline 28,2668 \end{array}$$

Sia per terzo esempio da togliersi il numero decimale 0,583 dall' intero 24. Scriveremo l' intero con la virgola a dritta, e con tanti zeri dopo la virgola quante sono le cifre decimali del numero minore, così l'intero non cambia valore; poi si esegue la sottrazione come si vede qui affianco, e si ottiene per resto 23,417.

$$\begin{array}{r} 24,000 \\ 0,583 \\ \hline 23,417 \end{array}$$

MOLTIPLICAZIONE DEI DECIMALI.

176. *Due decimali si moltiplicano fra loro come se fossero interi, non tenendo conto della virgola, e dopo si separeranno dal prodotto tante cifre decimali quante ne hanno i due fattori.*

Sia da moltiplicarsi il decimale 8,395 per l' altro 3,21.

Eseguendo la moltiplicazione come se fossero interi, senza tener conto della virgola, si avrà per prodotto 2694795; e separando da esso cinque cifre decimali, cioè quante ne sono nei due fattori, si otterrà il prodotto cercato che sarà 26,94795

Dim. Difatti, se il solo moltiplicando fosse decimale ed esprimesse millesimi, moltiplicato pel fattore intero, il prodotto esprime anche millesimi; perciò si debbono separare da esso tre cifre decimali. Se poi anche il moltiplicatore fosse decimale, ed esprimesse centesimi, non tenendo conto della

virgola, diviene cento volte maggiore; perciò moltiplicato per l'altro fattore decimale, il prodotto, che ha tre cifre decimali, è 100 volte maggiore del vero; dunque per avere il prodotto vero, quello che si ottiene deve dividersi per 100, perciò deve trasferirsi la virgola di due posti verso sinistra, quindi il prodotto verrà con cinque decimali, cioè con tante quante ne sono nei due fattori.

La stessa cosa può dimostrarsi nel seguente modo.

Scrivendo i numeri proposti sotto forma di frazione ordinaria, l'operazione si riduce a moltiplicare $\frac{8395}{1000}$ per $\frac{321}{100}$, e lasciando accennata la moltiplicazione dei numeratori, il prodotto sarà $\frac{8395 \times 321}{100000}$; perciò si ottiene moltiplicando i numeri proposti come se fossero interi, e dividendo il prodotto per l'unità seguita da tanti zeri quante sono le cifre decimali dei due fattori; il che equivale a separare dal prodotto tante cifre decimali quante ne contengono i due fattori.

Ecco per esercizio altri due esempi.

Sia da moltiplicarsi 53,002 per 0,0013. L'operazione si riduce a moltiplicare 53002 per 13, e poi dal prodotto 689026 si separeranno sette decimali supplendo con un zero la cifra che manca; perciò il prodotto sarà, 0,0689026.

Sia inoltre a moltiplicarsi 0,047 per 0,012. L'operazione si riduce a moltiplicare 47 per 12, e dopo dal prodotto 564 si separeranno sei decimali supplendo con zeri le tre cifre mancanti, e si avrà per prodotto 0,000564.

DIVISIONE DI UN NUMERO DECIMALE PER UN NUMERO INTERO.

177. *Un decimale si divide per un intero come se fossero ambedue interi, non tenendo conto della virgola, e dopo si separeranno dal quoziente tante cifre decimali quante ne ha il dividendo.*

Sia il numero 97,82 da dividersi per l'intero 78. Eseguia-

mo la divisione come si fa per gl' interi, non tenendo conto della virgola, e si avrà per quoziente 125 centesimi; perchè il dividendo essendo eguale a 9782 centesimi, diviso in 78 parti eguali, il quoziente esprime centesimi; quindi per indicare che dinota centesimi, si separano da esso due cifre decimali, cioè quante ne tiene il dividendo; perciò il quoziente è 1,25. Ma siccome restano 32 centesimi da dividersi per 78, il quoziente completo è $1{,}25+\frac{32}{78}$ di un centesimo. Trascurando la frazione complementare $\frac{32}{78}$ di un centesimo, il quoziente 1,25 differisce dal vero per meno di *un centesimo*, e si dice che *è approssimato a meno di un centesimo.*

178. Ordinariamente si ha bisogno di esprimere il quoziente in parti decimali di un certo ordine; perciò converrà ridurre il dividendo in parti decimali di quest' ordine, aggiungendo se occorre un conveniente numero di zeri alla dritta, ovvero trascurando le cifre di ordine inferiore, se ve ne fossero; e poi si dividerà pel divisore, ricordando che dopo bisognerà separare dal quoziente tante cifre decimali quante sono divenute quelle del dividendo.

Così p. es. volendo dividersi 0,23 per 56, e desiderandosi il quoziente espresso in 10000^{mi}, si convertirà il dividendo in 10000^{mi} aggiungendo due zeri alla sua dritta, e verrà eguale a 0,2300, che diviso per 56, dà per quoziente 0,0041 più $\frac{4}{56}$ *di un diecimilesimo*; e disprezzando la frazione complementale, il quoziente cercato espresso in 10000^{mi} sarà 0,0041, e differisce dal vero per meno di un diecimilesimo.

Sia ora da dividersi 583,02941 per 317, richiedendosi il quoziente in centesimi. Si eseguirà la divisione arrestandola dopo abbassata la cifra 2 dei centesimi, trascurando le

altre a dritta ; e si avrà per quoziente 1,83 approssimato a meno di un centesimo.

179. Se il quoziente non si volesse esprimere in parti decimali dell' unità, può ottenersi scrivendo il dividendo 0,23 sotto forma frazionaria, e poi si divide pel divisore; perciò viene eguale a $\frac{23}{100} : 56 = \frac{23}{5600}$.

Spesso si ha bisogno dividere un intero per un intero richiedendosi il quoziente espresso in parti decimali dell' unità; allora il dividendo si riduce in decimale aggiungendovi tanti zeri a dritta quante cifre decimali si vogliono nel quoziente, e poi si esegue la divisione ; ed infine si separano dal quoziente le cifre decimali richieste.

Sia da dividersi 34 per 526, esigendosi il quoto in 1000^{mi}. Si riduce il dividendo in 1000^{mi} moltiplicandolo per 1000, e viene eguale a 34000 *millesimi* che diviso per 526 dà per quoziente 64, che esprime pure *millesimi;* perciò si separano da esso tre cifre decimali, e viene eguale a 0,064 con un errore minore di un millesimo.

DIVISIONE DI UN DECIMALE PER UN DECIMALE.

180. *Si rende il divisore intero supprimendo la virgola, e nel dividendo si trasferisce la virgola verso dritta di tanti posti quante sono le cifre decimali del divisore, e poi si esegue la divisione, che si riduce a quella di un decimale per un intero o di un intero per un intero* (*).

(*) Si può anche dare la seguente regola per la divisione dei decimali. *Si esegue la divisione come si fa per gl' interi non tenendo conto della virgola, e poi dal quoziente si separano tante cifre decimali quante il dividendo ne ha dippiù del divisore ; e se ne ha meno , si pareggiano le cifre decimali aggiungendo zeri a dritta del dividendo, e poi si esegue la divisione, che si riduce a quella di un intero per un intero.*

Ma la ragione di questa regola riesce un poco stentata, e non facilissima come quella della regola scritta di sopra.

Sia da dividersi 83,0242 per 7,56.

Supprimiamo la virgola nel divisore, ed esso si moltiplica per 100, perchè ha due cifre decimali, e viene eguale a 756; ma affinchè il quoziente non cambiasse, moltiplichiamo anche il dividendo per 100 trasferendo la virgola di due posti verso dritta, e viene eguale a 8302,42; poi eseguiamo la divisione, che si riduce a quella di un decimale per un intero, e si avrà per quoziente 10,98 approssimato a meno di un centesimo, perchè restano 154 *centesimi* da dividersi per 756, che danno la frazione $\frac{154}{756}$ di un centesimo, che abbiamo trascurata.

DIVISIONE DI UN INTERO PER UN DECIMALE.

181. La divisione di un intero per un decimale va compresa nel caso precedente, perchè l' intero si può scrivere con la virgola alla dritta, e quanti zeri si vogliono dopo la virgola. E però la regola di tale divisione è la seguente.

Un intero si divide per un decimale, rendendo il divisore intero, sopprimendo la virgola, e si aggiungono a dritta del dividendo tanti zeri quante cifre decimali ha il divisore; poi si esegue la divisione che si riduce a quella di un intero per un intero.

Sia p. es. da dividersi 35 pel decimale 9,034.

Operando come abbiamo detto, si riduce a dividere 35000 per 9034, e si ottiene per quoziente $3\frac{7798}{9034}$. Se il quoziente si volesse in decimali p. es. in 1000^{mi}, bisognerà porre altri tre zeri a dritta del dividendo, e viene eguale a 35000,000, che diviso per 9034, dà per quoziente 3,874, differente dal vero per meno di un millesimo.

Digitized by Google

CALCOLO DI FRAZIONI DECIMALI COMBINATE CON FRAZIONI ORDINARIE.

182. Sieno a sommarsi i numeri $9\frac{5}{7}$, 3,45, $\frac{2}{3}$, 0,18, $\frac{1}{4}$.

Addizioniamo primieramente gl' interi ed i decimali, e si avrà per somma 12,63.

Addizioniamo ora le frazioni ordinarie, e si avrà per somma $1\frac{25}{84}$; e volendo il risultato espresso in millesimi ridurremo la frazione $\frac{25}{84}$ in millesimi, e viene eguale a 0,297; dunque la somma delle frazioni ordinarie espressa in millesimi è uguale a 1,297. Addizioniamo infine questa somma con l' altra 12,63, e si avrà la somma cercata, che sarà 13,927.

183. Sia da togliersi $36\frac{7}{12}$ da 52,084, richiedendosi il risultato in centesimi.

Ridurremo prima la frazione ordinaria in decimale espressa in centesimi, e viene eguale a 0,58; indi toglieremo 36,58 da 52,08 trascuraudo la cifra 4 dei millesimi, e si avrà per resto 15,50 approssimato sino ai centesimi. Difatti nel risultato manca la differenza fra le rimanenti parti trascurate dei due numeri, ma ciascuna di queste parti essendo minore di un centesimo, con più ragione la loro differenza sarà minore di un centesimo; perciò il risultato è approssimato a meno di un centesimo.

184. Se dovesse moltiplicarsi una frazione ordinaria per un numero decimale, si moltiplica il numeratore della frazione ordinaria pel numero decimale, ed il prodotto si divide pel denominatore della frazione.

Così p. es. dovendosi moltiplicare la frazione $\frac{35}{48}$ per 9,21; il prodotto sarà $\frac{35\times9,21}{48}=\frac{322,35}{48}$, che espresso in millesimi, viene eguale a 6,715.

185. Se dovesse dividersi un numero decimale per una frazione ordinaria, si pratica come se un intero dovesse dividersi per una frazione, cioè si moltiplica il decimale per la frazione ordinaria capovolta; e poi il numeratore del risultato, che sarà un decimale, si dividerà pel denominatore che è un intero.

Così p. es. dovendosi dividere 52,03 per $\frac{12}{13}$, il quoziente sarà $\frac{52,03\times13}{12}=\frac{676,39}{12}$; e volendolo approssimato sino a 100^{mi}, viene eguale a 56,36.

186. Se dovesse dividersi una frazione ordinaria per un decimale, si moltiplica il denominatore della frazione pel decimale, ed il numeratore si divide pel prodotto ottenuto.

Così p. es. volendosi dividere $\frac{15}{16}$ per 5,8, il quoziente sarà $\frac{15}{16\times5,8}=\frac{15}{9,28}$; ed approssimandolo sino ai millesimi viene eguale a 0,161.

RIDUZIONE DI UNA FRAZIONE ORDINARIA IN DECIMALE.

187. Occorrendo spesso ridurre una frazione ordinaria in decimale, ne diamo una regola a parte, sebbene nel n.° 144 avessimo trattato in generale della riduzione di una frazione in altra di diverso denominatore; e nel n.° 178 avessimo parlato della divisione di un intero per un intero esprimendo il quoziente in parti decimali dell' unità.

Digitized by Google

Si divide il numeratore pel denominatore aggiungendo a dritta del dividendo tanti zeri quante cifre decimali si vogliono nella frazione decimale; e dopo si separano dal quoziente le cifre decimali richieste.

Sia la frazione $\frac{5}{7}$ da ridursi in millesimi.

Siccome ogni frazione equivale al quoziente che si ottiene dividendo il numeratore pel denominatore; la proposta frazione è uguale a 5 diviso per 7; e perchè il quoziente si vuole in 1000^{mi} ridurremo il numeratore in 1000^{mi} moltiplicandolo per 1000, e viene eguale a 5000 millesimi, che diviso per 7, dà per quoziente 714 millesimi; quindi per indicare che dinota millesimi ne separiamo tre cifre decimali, e viene eguale a 0,714 millesimi, con l'errore minore di un millesimo, perchè restano 3 millesimi da dividersi per 7 che fanno $\frac{3}{7}$ di un millesimo, i quali si trascurano.

CONDIZIONI PERCHÈ UNA FRAZIONE ORDINARIA SI POSSA CONVERTIRE ESATTAMENTE IN DECIMALE.

188. *Una frazione ordinaria irriducibile si converte esattamente in decimale se i fattori primi del denominatore sono solamente 2 e 5.*

In effetti, il denominatore dovendo dividere esattamente il prodotto del numeratore per una potenza di 10, ed essendo primo col numeratore che è un fattore del prodotto, deve dividere l'altro fattore che è una potenza di 10; perciò deve contenere i soli fattori di questa potenza che sono 2 e 5.

I zeri da aggiungersi a dritta del numeratore affinchè la divisione riesca esatta debbono essere tanti quante unità sono nel massimo esponente che il fattore 2 o 5 ha nel de-

Digitized by Google

nominatore; perchè nel numeratore con i zeri a dritta che fa da dividendo debbono esservi i fattori 2 e 5 con un esponente che non sia minore di quello che questi fattori hanno nel divisore, ossia nel denominatore.

Così p. es. se nel denominatore il fattore 5 ha il massimo esponente, e questo è 4, nel numeratore deve esserci 5^4 affinchè la divisione riesca esatta, perciò deve moltiplicarsi per 10^4 per potersi dividere esattamente pel denominatore; e quindi le cifre decimali della frazione equivalente alla proposta saranno quattro.

Se poi il denominatore di una frazione ordinaria non è divisibile nè per 2 nè per 5, essa non potrà mai ridursi in decimale.

Dunque per vedere se una frazione ordinaria che ha nel denominatore i fattori 2 e 5 ed altri fattori sia convertibile esattamente in decimale, bisogna prima renderla irriducibile; e con ciò, se si sopprimono nel denominatore i fattori diversi da 2 e da 5, essa sarà convertibile esattamente in decimale.

Senza ricorrere al massimo comun divisore per renderla irriducibile si può scomporre il denominatore in due fattori uno dei quali sia formato dai soli fattori 2 e 5, e l'altro sia il quoziente che si ottiene dopo aver diviso il denominatore quante volte si può per 2 e per 5; e se la frazione è riducibile esattamente in decimale, il detto quoziente dovrà dividere il numeratore, perchè solo in tal caso si converte in un'altra che ha nel denominatore i soli fattori 2 e 5.

FRAZIONI DECIMALI PERIODICHE.

189. Una frazione decimale di un numero illimitato di cifre, in cui da un certo posto in poi si ripete sempre lo stesso numero di cifre con lo stesso ordine disposte si dice *periodica;* e l'insieme delle cifre che si ripetono si dice *periodo.*

Se il periodo comincia dalla prima cifra decimale la fra-

zione si dice *periodica semplice;* se non comincia dalla prima cifra decimale si dice *periodica mista.* Quando è periodica mista le cifre decimali che precedono il periodo diconsi *cifre irregolari*, e formano la parte non periodica.

Così, per esempio, le frazioni illimitate 0,253253253... , e 0,07141414... sono periodiche; e la prima è *periodioca semplice*, perchè il periodo 253, che è di tre cifre, comincia dalla prima cifra decimale; la seconda è *periodica mista*, perchè il periodo 14, che è di due cifre, comincia dalla terza cifra decimale.

190. Le frazioni ordinarie che non possono convertirsi esattamente in decimali si riducono in decimali periodiche; perchè nelle divisioni che si fanno per ridurle in decimali, i resti essendo sempre minori del divisore, non vi possono essere al più che tanti resti differenti quante unità meno una tiene il divisore, ossia il denominatore; perciò, allorchè si è giunto ad uno dei resti precedenti, debbono ritornare nel quoziente le stesse cifre che eransi avute da quel resto in poi.

Dunque le divisioni da farsi per ricomparire le cifre del periodo saranno al massimo tante quante unità sono nel denominatore, il che avviene quando vi sono tanti resti diversi quante unità meno una sono nel divisore.

Così p. es. la frazione $\frac{3}{7}$ non potendosi convertire in decimale, perchè il denominatore è un numero primo diverso da 2 e da 5, si *svolge* in decimale periodica semplice, eguale a 0,428571428571... Difatti nella settima divisione il dividendo essendo eguale a quello della prima divisione, torneranno ad aversi periodicamente le stesse sei cifre nel quoziente.

Così pure la frazione irriducibile $\frac{26}{825}$ non potendosi con-

vertire esattamente in decimale, perchè i fattori del denominatore non sono tutti eguali a 2 ed a 5, essa si trasforma in decimale periodica, eguale a 0,031515..., il cui periodo comincia dalla terza cifra decimale. In effetti, nella quarta divisione il dividendo 125 essendo eguale a quello della seconda divisione, tornano ad aversi periodicamente nel quoziente le stesse cifre 1 e 5, che si sono avute dalla seconda in poi.

191. La frazione ordinaria da cui deriva una frazione decimale periodica si chiama *frazione generatrice* della decimale.

La frazione generatrice di una decimale periodica è il *limite* a cui la decimale si approssima, a misura che si considerano più cifre della frazione decimale: chiamandosi *limite* di una quantità variabile un'altra quantità a cui la variabile si avvicina incessantemente, in modo da differirne per una grandezza minore di qualunque data.

192. Vi sono alcune frazioni ordinarie rispetto a cui è facile vedere quali sieno le decimali periodiche in che esse si sviluppano. Queste sono le frazioni $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{99}$, $\frac{1}{999}$, ec. che si sviluppano rispettivamente nelle periodiche 0,111..., 0,010101..., 0,001001001...,

Da qui segue che le frazioni $\frac{2}{9}$, $\frac{3}{9}$, $\frac{4}{9}$, ec. sino a $\frac{9}{9}$ si sviluppano nelle periodiche 0,222..., 0,333...,0,444..., ec. 0,999....

L' ultima frazione essendo eguale all' unità, ne segue che l' unità è il *limite* della frazione decimale periodica 0,999...

Osserviamo inoltre che le frazioni $\frac{2}{99}$, $\frac{3}{99}$, ec. sono eguali alle periodiche 0,0202... 0,0303... e che le frazioni $\frac{2}{999}$, $\frac{3}{999}$, ec. sono eguali alle periodiche 0,002002... 0,003003 ec....

Essendosi veduto che $1 = 0,999...$, sarà $0,1 = 0,0999...$, $0,01 = 0,00999...$, $0,001 = 0,000999...$, ec.

Da ciò si raccoglie che ogni frazione, anche se fosse convertibile

esattamente in decimale, può essere rappresentata da una frazione decimale periodica. In effetti, la frazione decimale esatta 0,236 essendo eguale a 0,235+0,001, ponendo invece di 0,001, la sua espressione periodica 0,000999, verrà 0,236=0,23599999...

Dunque: *una frazione decimale finita equivale alla periodica che si ottiene diminuendo la cifra a dritta di un' unità, e facendola seguire dalla cifra 9 ripetuta un numero illimitato di volte.*

193. *La frazione generatrice di una decimale periodica semplice equivale alla frazione ordinaria che ha per numeratore il periodo, e per denominatore la cifra 9 scritta tante volte quante sono le cifre del periodo.*

Sia la frazione periodica di una cifra 0,777... essa è uguale alla frazione $\frac{7}{9}$.

Difatti, si vede che la periodica $0,777...=0,111...\times 7$, ma la periodica 0,111..., è uguale ad $\frac{1}{9}$; perciò viene $0,777... = \frac{1}{9}\times 7=\frac{7}{9}$.

Sia ora la periodica 0,232323... di due cifre; essa è uguale alla frazione ordinaria $\frac{23}{99}$.

In effetti, la frazione $0,2323...=0,010101\times 23$, ma la periodica 0,010101... è uguale ad $\frac{1}{99}$, e perciò ne viene $0,2323=\frac{1}{99}\times 23=\frac{23}{99}$.

Similmente si dimostra per i casi in cui il periodo avesse più di due cifre.

194. *La frazione generatrice di un' altra decimale periodica mista è quella che ha per numeratore la differenza fra l' intero formato dalle cifre irregolari e dal primo periodo, e l' intero formato dalle sole cifre irregolari, ed ha per denomina-*

tore la cifra 9 scritta tante volte quante sono le cifre del periodo seguita da tanti zeri quante sono le cifre irregolari.

Sia la frazione periodica mista 0,32675675...

Trasferendo la virgola dopo le cifre irregolari, essa si moltiplica per 100, e diviene 32,675675...; quindi ne risulta un intero ed una periodica semplice; ma allora invece di questa periodica possiamo porre la sua generatrice, e la proposta è 100 volte minore del detto intero unito a questa generatrice, perciò viene eguale a $32\frac{675}{999} : 100 = \frac{32\times999+675}{99900}$.

Ma 32×999, è uguale a $32\times1000-32=32000-32$; quindi la proposta viene eguale a $\frac{32000-32+675}{99900} = \frac{32675-32}{99900}$.

195. Il denominatore della frazione generatrice di una periodica semplice, essendo formato dalla cifra 9 scritta una o più volte, non è divisibile nè per 2 nè per 5; e quindi se la frazione si rende irriducibile, nè anche sarà divisibile per 2 e per 5.

196. Il denominatore della generatrice di una periodica mista essendo formato dalla cifra 9 scritta uno o più volte seguita da tanti zeri quante sono le cifre irregolari, tiene ciascuno dei fattori 2 e 5 con un esponente eguale al numero delle cifre irregolari; ed almeno uno di questi fattori vi resta col medesimo esponente, perchè non può sopprimersi con un egual fattore del numeratore; per la ragione che il numeratore non può avere ambedue i fattori 2 e 5, altrimenti terminerebbe con zero, ma allora l' ultima cifra irregolare eguaglierebbe l' ultima del periodo, ed il periodo comincerebbe dalla cifra precedente, il che è contro l' ipotesi.

197. *Una frazione irriducibile si sviluppa in periodica semplice quando il denominatore non è divisibile nè per 2 nè per 5.*

Digitized by Google

Difatti, non può convertirsi esattamente in decimale, perchè il denominatore non si compone dai fattori 2 e 5; nè può ridursi in periodica mista, altrimenti sarebbe eguale alla generatrice di questa che ha nel denominatore uno dei fattori 2 e 5, o ambedue, con un esponente eguale al numero delle cifre irregolari.

198. *Una frazione irriducibile si sviluppa in periodica mista quando il denominatore è divisibile per 2 o per 5 e per altri fattori.*

Difatti non può convertirsi esattamente in decimale, perchè oltre dei fattori 2 e 5 contiene altri fattori; nè può ridursi in periodica semplice, altrimenti sarebbe eguale alla generatrice di questa che non ha nel denominatore alcuno dei fattori 2 e 5.

RIDUZIONE DI UNA FRAZIONE DECIMALE IN ORDINARIA.

199. *Una frazione decimale quando non è periodica equivale alla frazione ordinaria che ha per numeratore l'intero formato dalle cifre decimali, e per denominatore l'unità seguita da tanti zeri quante sono le dette cifre*

Resta poi a moltiplicare la detta frazione ordinaria, e la semplificazione si vede a colpo d'occhio, se vi è, e vi sarà quando il numeratore è divisibile per 2 o per 5; perchè il denominatore è sempre divisibile per 2 e 5.

Così p. es. i numeri decimali 3,64 e 0,125 ridotti in frazioni ordinarie vengono eguali a $3\frac{64}{100}$ e $\frac{125}{1000}$; e siccome il numeratore della prima è divisibile due volte per 2 ossia per 4, ed il denominatore della seconda è divisibile tre volte per 5 ossia per 125; esse si semplificano, e vengono eguali a $3\frac{16}{25}$ ed $\frac{1}{8}$.

Allorchè la frazione decimale è periodica, abbiamo detto nei n.i 193 e 194 come si trova la frazione ordinaria equivalente, ossia la generatrice.

CORREZIONE DELLA CIFRA A DRITTA DI UN NUMERO APPROSSIMATO.

200. Prima di tutto osserviamo che se in un numero si trascurano le sue cifre da un certo posto in poi andando verso dritta, la parte trascurata è sempre minore di un'unità dell' infimo ordine della parte che resta. Così p. es. nel numero 0,837958, se si trascurano le cifre 958, la parte trascurata è minore di un millesimo, cioè di un' unità dell' infimo ordine della rimanente parte non trascurata 0,837.

Difatti, se le cifre trascurate fossero tutte 9, si dovrebbe ad esse aggiungere un' unità dell' infim' ordine, cioè 1 milionesimo, affinchè la parte trascurata facesse 1 millesimo. Dunque con più ragione quando non sono tutte 9, essa è minore di 1 millesimo.

Passiamo ora alla regola per correggere la cifra a dritta di un numero approssimato.

201. *La cifra a dritta di un numero approssimato si corregge aumentandola di un' unità, solo quando la prima delle cifre disprezzate è **5** o maggiore di **5**.*

In tal caso il numero è approssimato *per eccesso* o *in più*. Quando poi la prima cifra che si trascura è minore di 5, la cifra precedente si lascia com' è, ed il numero è approssimato *per difetto*, o *in meno*.

Nell' uno e nell' altro caso l' errore del numero approssimato è minore di mezza unità del suo infimo ordine.

Sia p. es. il numero 0,216849 che vuole esprimersi in millesimi, trascurando le unità degli ordini inferiori. Siccome la prima cifra 8 che si trascura è maggiore di 5, la cifra 6 a sinistra si aumenta di un' unità, e si avrà il nu-

mero 0,217 con la cifra a dritta corretta, il quale è maggiore del vero per meno di mezzo millesimo, perchè il millesimo che si è messo dippiù invece di 8 diecimillesimi e delle cifre seguenti, supera 8 diecimilesimi per meno di mezzo millesimo.

Se il numero fosse stato 0,216359, la cifra 3 dei diecimilesimi che si trascura con le altre seguenti fanno meno di mezzo millesimo, perciò il numero 0,216 che si ritiene è minore del vero per meno di mezzo millesimo.

Questa regola è applicabile generalmente a qualunque quantità che voglia valutarsi in unità intere di un certo ordine. Così p. es. un esercito contandosi per unità di migliaia di uomini, se il numero degli uomini fosse compreso per 63000 e 64000, si dirà essere 63000 o 64000, secondo che il numero degli uomini da aggiungersi a 63000 è minore o maggiore di mezzo migliaio.

202. Se si ha un numero approssimato, e la sua cifra a dritta è zero, questa non può supprimersi, altrimenti s'incorrerebbe in errore sul grado di approssimazione.

Così p. es. conoscendosi che l' ettolitro paragonato al tomolo napolitano è espresso dal numero approssimato 1,800; se si levassero i due zeri, e si dicesse che l' ettolitro è prossimamente eguale a tomoli 1,8, si crederebbe che l' errore è minore di 1 decimo, e non già di 1 millesimo.

CAP. VI.

COMPLEMENTO ARITMETICO.

203. Si chiama *complemento aritmetico* di un numero il resto che si ottiene togliendo il numero da un altro maggiore, che è formato dall' unità seguita da zeri.

Così il complemento aritmetico di 653 è il resto che si ottiene togliendo questo numero da 1000, o da 10000, o da 100000, ec. Nel prendere il complemento di un numero, p. es. di 653 su di 1000, o su di 10000, o su di 100000, ec. si esprime dicendo: il complemento di 653 a 1000, o di 653 a 10000, o di 653 a 100000, ec. Il primo di questi complementi è 347, il secondo è 9347, il terzo è 99347.

Il complemento aritmetico di un numero si ottiene togliendo la cifra significativa a dritta da 10, e tutte le altre da 9, se si prende sull' unità seguìta da tanti zeri quante sono le cifre del numero, e se i zeri sono dippiù, le cifre del complemento non cambiano, ma solo vengono precedute dalla cifra 9 scritta tante volte quanti sono i zeri dippiù.

Così il complemento di 368 a 1000 è 631, ma quello di 368 al numero 100000 che ha due zeri dippiù, è 99631.

Nel prendere il complemento aritmetico di un numero la sottrazione si fa a memoria, senza scrivere il numero su cui si prende il complemento, così il complemento di 583094 a 100000 si prende senza scrivere 100000 sopra a 583094, e poi eseguire la sottrazione; ma si legge a mente, pronunciando le sue cifre ad una ad una, o a due a due, ec., e nel pronunciarle si scrivono. Pronunciandole ad una ad una si dirà: *quattro, uno, sei, nove, zero, sei*, e si scrive il complemento 416906. Pronunziandole a due a due si dirà: *quarantuno, sessantanove zerosei*.

Il complemento aritmetico si adopera per eseguire la sottrazione mediante l'addizione. Così volendosi sottrarre 286 da 793, si aggiunge a 793 il complemento di 286 a 1000, che è 714, e poi dalla somma 1507 si toglie l'unità dell'ordine su cui si è preso il complemento, la quale è un migliaio, e questa sottrazione si fa all'istante, perchè basta diminuire di un'unità la cifra delle migliaia e si ha il resto cercato 507.

Difatti, il risultato che si ha aggiungendo il complemento al numero 793 è 793+1000—286, il quale tiene 1000 unità dippiù, quindi togliendo questa unità di migliaia, si ha il resto 507 che si cercava.

Il complemento aritmetico si usa con vantaggio quando si debbono addizionare e sottrarre fra loro molti numeri, perchè invece di fare due addizioni ed una sottrazione si fa una sola addizione.

Così, se dovessero farsi le seguenti addizioni e sottrazioni

$$67598-54756+3842-2327+5634-850,$$

si dovrebbero addizionare prima i numeri 67598, 3842, 5634, e po i numeri 54756, 2327, 850, ed infine si dovrebbe togliere dalla prima somma la seconda. Ma invece si fa una sola addizione, come si vede qui affianco, aggiungendo ai primi tre numeri i complementi dei tre secondi, che si prendono sull'unità seguìta da tanti zeri quante cifre sono nel maggiore di essi che è 54756; perciò si prendono i complementi a 100000 dei detti numeri, e poi si tolgono dalla somma 318941 tre unità dell' ordine su cui s' è preso il complemento, cioè tre centinaia di migliaia, e si avrà il risultato richiesto eguale a 318941.

67598
45240
3842
97673
5634
99150
318941

Digitized by Google

DIVERSI SISTEMI DI NUMERAZIONE, E TRADUZIONE DI UN NUMERO DA UN SISTEMA IN UN ALTRO.

204. Nel n.° 23 definimmo che cosa si intende per sistema di numerazione, ed osservammo che possono esservi infiniti sistemi di numerazione, e che in ogni sistema di numerazione le unità di un ordine si riducono in unità di ordine inferiore moltiplicandole per la base del sistema.

Ora osserviamo che le cifre bisognevoli a rappresentare un numero in qualunque sistema sono tante quante unità tiene la base del sistema. Così le cifre del sistema senario sono sei, e sono le cifre 1, 2, 3, 4, 5, 0; perchè le unità di un ordine di questo sistema non possono giungere sino a 7, altrimenti formerebbero un' unità dell' ordine superiore. Dunque in un numero scritto nel sistema senario non può esservi la cifra 7.

Passiamo ora a definire un vocabolo algebrico di cui faremo uso.

Si dice *polinomio* una quantità rappresentata da lettere, e composta da altre quantità separate dai segni *più* o *meno*, le quali diconsi *termini* del polinomio. Il polinomio poi prende il nome di *monomio*, *binomio*, *trinomio*, *quadrinomio*, secondo che ha uno, o due, o tre, o quattro termini.

Così la quantità $a^4b+a^3b^2+a^2b^3-ab^4$ è un polinomio e propriamente è un quadrinomio. La quantità $a^5-c^2x^2+d^4x$ è un trinomio; la quantità $3a-b$ è un binomio; e la quantità df è un monomio.

Allorchè i termini di un polinomio sono scritti in modo che le potenze della medesima lettera vanno sempre crescendo o sempre decrescendo, il polinomio si dice *ordinato secondo le potenze crescenti* o *decrescenti* di essa lettera. Così il primo polinomio scritto di sopra è ordinato secondo le potenze decrescenti della lettera a, e secondo le potenze crescenti della lettera b.

205. *Un numero di qualunque sistema può scriversi sotto forma di polinomio ordinato secondo le diverse potenze della base del sistema.*

Sia il numero 37846 scritto nel sistema decimale. Scomponendolo nelle unità dei suoi diversi ordini viene eguale a

$$6+40+800+7000+30000;$$

ma $40=4\times10$, $800=8\times100=8\times10^2$, $7000=7\times1000=7\times10^3$; e $30000=3\times10^4$; perciò viene

$$37846=6+4\times10+8\times10^2+7\times10^3+3\times10^4.$$

Ecco dunque che il numero si è scritto sotto forma di polinomio ordinato secondo le potenze crescenti della base 10. Se i termini si scrivessero con ordine inverso, sarebbe ordinato secondo le potenze decrescenti di 10.

Sia ora il numero 5643 scritto nel sistema che ha per base 7. Esso scritto sotto forma di polinomio ordinato secondo le potenze decrescenti della base, viene eguale a

$$5\times7^3+6\times7^2+4\times7+3;$$

perchè in questo sistema le unità dei diversi ordini si riducono in unità di ordine inferiore moltiplicandole per 7; quindi le 5 unità di quarto ordine si riducono in unità di prim'ordine moltiplicandole 3 volte di seguito per 7; e le 6 unità di terz'ordine si riducono in unità di prim'ordine moltiplicandole 2 volte di seguito per 7; e le 4 unità di second'ordine si riducono in unità di prim'ordine moltiplicandole per 7.

La precedente formola, che può applicarsi a qualunque sistema, serve a tradurre nel sistema decimale il numero 5643 scritto nel sistema settenario. In effetti, tutte le unità del numero essendo rappresentate dalla somma

$$3+4\times7+6\times7^2+5\times7^3,$$

ed essendo $7^2=49$, $7^3=343$, tutte le unità del numero vengono date dalla somma scritta qui affianco, ed il numero proposto tradotto nel sistema decimale viene eguale a 2187.

3
28
441
1715
2187

206. Se indicassimo con a le unità di prim'ordine, con b quelle di secondo, con c quelle di terzo, con d quelle di quarto, ec. e con B la base del sistema, si avrebbe la seguente formola generale che rappresenta le unità di un numero di qualunque sistema per mezzo di un polinomio ordinato secondo le potenze della base del sistema

$$a+b\times B+c\times B^2+d\times B^3+\text{ec...}$$

207. Può anche darsi la seguente regola per tradurre un numero da un sistema nel decimale.

Si riducono le unità dell'ordine più alto in unità dell'ordine inferiore moltiplicandole per la base, ed al prodotto si aggiungono le unità dell'ordine inferiore; poi la somma si moltiplica di nuovo per la base per ridurle in unità dell'ordine più basso, e vi si aggiungono le unità di quest'ordine, e così si continua finchè vi si aggiungono le unità dell'infim'ordine.

Così il numero 5234 scritto nel sistema senario, per tradurlo nel sistema decimale si moltiplicano le 2 unità di quart'ordine per 6, e si

Digitized by Google

riducono in 30 unità di terz' ordine a cui si aggiungono le altre 2 unità di terz' ordine e fanno 32 unità di terzo; poi queste 32 di terzo si moltiplicano di nuovo per 6 per ridurle in unità di secondo, e fanno 195 unità di second' ordine a cui si aggiungono le altre 3 di secondo e fanno 198 unità di secondo; infine queste si moltiplicano di nuovo per sei per ridurle a prim' ordine, e vi si aggiungono le 4 di prim' ordine, e così il numero proposto ridotto nel sistema decimale viene eguale a 1174 unità.

208. *Un numero scritto nel sistema decimale si scrive in un altro sistema dividendo il numero dato per la nuova base, e poi il quoziente si continua a dividere per queste base, e così si prosegue sino a che si giunge ad un quoziente minore della detta base; le cifre che rappresentano i resti e l' ultimo quoziente saranno quelle che, a contar da dritta, rappresentano il numero scritto nel nuovo sistema.*

Sia il numero 6032 scritto nel sistema decimale, e si voglia scriverlo nel sistema settenario. Siccome le unità di second' ordine sono sette volte maggiori di quelle di prim' ordine, se dividiamo le 6032 unità di prim' ordine per 7 avremo quelle di secondo; fatta la divisione, come si vede quì affianco, si hanno 861 unità di second' ordine, e restano 5 unità semplici, ossia di prim' ordine. Similmente, se dividiamo le 861 unità di second' ordine per la base 7, avremo le unità di terz' ordine che sono 123, e restano *zero* unità di second' ordine. Poi passiamo a dividere le 123 unità di terz' ordine per 7 per avere quelle di quart' ordine, e si hanno 17 unità di quarto, e restano 3 di terzo; indi si passa a dividere le 17 unità di quart' ordine per 7 per avere quelle di quinto ordine, e si hanno 2 unità di quint' ordine, e ne restano 3 di quarto. E poichè le 2 unità di quint' ordine sono meno di 7, l' ordine più alto nel sistema settenario è il quinto, e le unità degli ordini inferiori sono *3, 4, 0, 5;* perciò il numero 6032 del sistema decimale, scritto nel sistema settenario viene 23405.

6032	7	5
861	7	0
123	7	4
17	7	3
2		

209. Se si ha un numero scritto in un sistema diverso dal decimale, che si voglia scrivere in un altro sistema anche diverso dal decimale, prima si converte nel sistema decimale, e poi col metodo precedente si traduce nell' altro sistema che si vuole.

CAP. VII.

Sistema metrico.

IDEE GENERALI SUL SISTEMA METRICO.

210. Si chiama *sistema metrico* di una popolazione il complesso di tutte le misure che sono in uso presso la medesima.

Qui dunque giova ricordare che cosa sia *misura*.

Misurare una grandezza vuol dire paragonarla ad un' altra della stessa natura presa per unità, per vedere quante volte contiene questa unità, o quante parti contiene dell' unità.

Dunque la misura di una grandezza viene espressa dal numero che indica quante unità e parti dell' unità sono contenute in essa.

Le principali grandezze che occorre misurare negli usi sociali sono le linee, le superficie, i volumi, i pesi, il tempo, e la moneta. E però le principali unità di cui si fa uso sono l' *unità lineare*, l' *unità superficiale*, l' *unità di capacità* o *volume*, l' *unità di peso*, l' *unità di tempo*, e l' *unità di moneta*.

Per *unità lineare* si prende una linea retta di convenuta lunghezza.

Conviene poi scegliere questa linea in modo che se ne conosca il valore rispetto ad un' altra linea immutabile in natura, affinchè in ogni tempo si possa ottenere, anche se si distruggessero i moduli della stessa.

Digitized by Google

Per *unità superficiale* si prende il *quadrato* che ha per lato l' unità lineare (*)

Per *unità di volume* o *di capacità* si prende il cubo che ha per lato l'unità lineare (**).

Per *unità di peso* si prende il peso di un determinato volume di acqua pura (*distillata*) , ad una data temperatura e pressione barometrica (***).

(*) Il *quadrato* è una porzione di superficie piana chiusa da quattro linee rette eguali e perpendicolari fra loro come si vede nella figura qui affianco. Ognuna di queste quattro rette si chiama *lato* del quadrato. Un quadrato , secondo che il suo lato è lungo un metro , un piede , un palmo , ec. si dice *metro quadrato, piede quadrato, palmo quadrato*, ec.

(**) Il *cubo* è un volume chiuso da sei facce che sono quadrati eguali. Il lato di ciascuno di questi quadrati si chiama *lato* del cubo; perciò il cubo tiene in tutto dodici lati. Un cubo, secondo che il suo lato è lungo un metro, un piede , un palmo , ec. si dice *metro cubo* o *cubico* , *piede cubo* o *cubieo*, *palmo cubo* o *cubico*.

(***) Per unità di peso conviene prendere il peso di un determinato volume di una materia che non sia soggetta a cambiar di peso ; e però non sarebbe buono p. es. il legno il quale diviene più leggiero quando l' aria è secca. Si preferisce l' acqua , perchè è una cosa comunissima, ed inoltre, essendo liquida, le si può dare qualunque forma mettendola in un vaso che abbia la forma desiderata. Essa deve essere distillata perchè così si purifica da altre materie con cui può trovarsi combinata, come sono p. es. lo zolfo, il ferro , il sal comune, ec. ; e così resta sempre del medesimo peso. Deve essere ad una data temperatura, perchè cambiando la temperatura essa diviene più o meno porosa , ed allora lo stesso volume di acqua cambierebbe di peso. Si sceglie la temperatura a quattro gradi del termometro centigrado, perchè allora acquista la massima densità, cioè un determinato volume contiene il massimo di materia acquea. Deve essere riferita ad una determinata pressione dell' aria, la quale viene misurata da un istrumento chiamato *barometro*; perchè un corpo è tanto più leggiero quanto più è pesante l'aria in cui giace: e perciò si prende il peso dell' acqua nel vuoto , in cui la pressione barometrica è zero.

Per *unità di tempo* si prende il *giorno*, che è l'intervallo di tempo che passa dalla mezza notte alla mezza notte seguente. Esso si divide in 24 *ore*, e l'ora in 60 *minuti primi*, ed il minuto primo in 60 *minuti secondi*, e così di seguito.

Per *unità di moneta* si prende un determinato peso di metallo coniato, ordinariamente di argento, oro, o rame.

I gioiellieri nel pesare le pietre preziose fanno uso di una unità di peso convenzionale detta *carato* (*) che si divide in quattro *grani;* ed il grano si suddivide in *ottavi* e *sedicesimi*.

(*) Dall'arabo *Kuara*, nome d'albero i cui semi secchi conservano lo stesso peso; e perciò taluni popoli dell'Africa l'usavano da tempo immemorabile per pesare l'oro, e poi se n'estese l'uso anche alle pietre preziose. Il carato di cui fanno uso tutti i gioiellieri del mondo incivilito equivale a decigrammi 2,0654, e si divide in quattro *grani*; perciò un grano del carato equivale a grammi 0,5164.

Se paragoniamo il grano del carato al grano dell'oncia francese si ha che grani 74 $^1/_{15}$ del carato eguagliano 72 grani dell'oncia francese ossia 3 *scrupoli*.

Se poi paragoniamo il grano del carato al grano dell'oncia napolitana il quale si dice pure *acino*, si ha che grani 17 $^1/_4$ del carato eguagliano un trappeso ossia 20 acini dell'oncia napolitana; e quindi un carato è uguale ad acini 4,636 dell'oncia napolitana.

I gioiellieri napoletani nel pesare i brillanti dividevano l'oncia napoletana in 130 carati, perchè la parte 130^{ma} dell'oncia equivale prossimamente ad un carato. In effetti, un carato, che è acini 4,636 dell'oncia napolitana, moltiplicato per 130 dà per prodotto acini 602,68; e quindi un oncia, che è 600 acini, è minore di 130 carati, e ne differisce per acini 2,68. Questo errore non sarebbe trascurabile sul peso di molti carati, perchè sul peso di 13 carati che, secondo i gioiellieri napoletani equivarrebbe ad un decimo dell'oncia, l'errore sarebbe 0,268 di acino dell'oncia, ossia 0,23 di grano del carato, cioè quasi un quarto di grano, il cui prezzo in Napoli è circa 16 lire per i brillanti minori di 2 grani, ma per i brillanti di maggior peso, il prezzo di un grano potrebbe duplicarsi, triplicarsi e crescere assai dippiù.

Il *carato* è anche un'altra sorta di unità che si usa nei lavori di oreficeria, dividendosi una massa qualunque di oro in 24 parti eguali

Digitized by Google

211. Le condizioni a cui deve soddisfare un buon sistema metrico sono che tutte le misure derivino con rapporti semplici ed esatti dall'unità lineare, e questa deve ricavarsi da un fatto immutabile in natura, affinchè in ogni tempo, anche se venissero distrutti i *moduli* o *campioni* della detta unità, essa possa sempre ritrovarsi. Fu perciò che nel 1799 una commissone di dotti francesi, italiani, e spagnuoli stabilì per unità lineare una parte alliquota del *meridiano terrestre*, che fu chiamata *metro* (misura per eccellenza).

Il sistema metrico decimale è preferibile ad ogni altro sistema, perchè le unità di un ordine si riducono in quelle di ordine inferiore o superiore moltiplicando o dividendo per 10, 100, 1000, ec. E quindi ne deriva che le operazioni di calcolo si eseguono facilmente su i numeri concreti del sistema metrico decimale, mentre negli altri sistemi occorrono molte avvertenze per eseguire le dette operazioni.

Un sistema metrico per esser *perfetto* non solo deve essere decimale, ma deve soddisfare alle condizioni dette più sopra; e tale appunto è il nostro sistema metrico decimale, di cui passiamo a far parola.

Sistema metrico decimale.

212. Il sistema metrico decimale è quello in cui le unità si dividono e suddividono in parti decimali.

L'*unità di lunghezza* base di tutto il sistema metrico decimale è il *metro:* esso è uguale alla diecimilionesima parte di un quarto del meridiano terrestre.

I multipli decimali dell'unità, sia lineare, sia qualunque, si enunciano facendo precedere il nome dell'unità dalle parole *deca*, *etto*, *chilo*, *miria* che significano rispettivamente *dieci*, *cento*, *mille*, *diecimila*. I summultipli si e-

---

dette *carati*, e l'oro si dirà p. es. di 18 carati, se delle 24 parti eguali in cui si divide la sua massa, 18 sono di oro puro, e le altre 6 sono di diverso metallo che suol essere rame o argento. Insomma il numero dei carati indica il numero delle parti di oro puro che sono in una massa di oro la quale si concepisce divisa in 24 parti eguali.

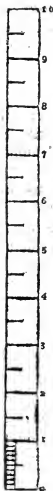
Il carato dell'oro si suddivide in 16 parti eguali ossia in *sedicesimi*, ed anche in 32 parti eguali dette *grani*.

nunciano facendo precedere il nome dell' unità dalle parole *deci*, *centi*, *milli*, che significano *decimi*, *centesimi*, *millesimi* dell' unità. Così p. es. si dice *decametro*, *ettometro*, *chilometro*, *miriametro* per dinotare rispettivamente dieci, cento, mille, diecimila metri; e dicesi *decimetro*, *centimetro*, *millimetro* per dinotare decimi, centesimi, millesimi di metro.

Ecco qui appresso le diverse specie di misure.

MISURE LINEARI.

215. L' unità di misura di lunghezza è il *metro*.

Multipli decimali del metro.	*Summultipli decimali del metro.*
Decametro=dieci metri	Decimetro=un decimo del metro
Ettometro=cento metri	Centimetro=un centesimo del metro
Chilometro=mille metri	Millimetro=un millesimo del metro.
Miriametro = diecimila metri	

Qui affianco si può vedere un decimetro nella sua naturale lunghezza, diviso in centimetri, ed un centimetro diviso in millimetri.

MISURE DI SUPERFICIE.

214. L' unità di misura di superficie è il *metro quadrato*.

Per le misure agrarie si fa uso del *decametro quadrato*, che è cento metri quadrati, e si dice

Digitized by Google

ara; e si fa pure uso dell'*ettara*. La centesima parte dell'ara, ossia la *centiara*, nonè che il metro quadrato sotto altro nome.

Multipli decimali del metro quadrato.

Decametro quadrato ossia *ara*=cento metri quadrati.
Ettometro quadrato ossia
ettara eguale a cento are =diecimila metri quadrati
Chilometro quadrato =un milione di metri quadrati
Miriametro quadrato =cento milioni di metri quadrati.

Summultipli decimali del metro quadrato.

Decimetro quadrato=un centesimo del metro quadrato.
Centimetro quadrato=un diecimilesimo del metro quadrato.
Millimitro quadrato=un milionesimo del metro quadrato.

Da qui si vede che i multipli del metro quadrato i quali si usano non sono di dieci in dieci volte più grandi, come nelle misure lineari, ma sono di cento in cento volte più grandi; ed i summultipli sono di cento in cento volte più piccioli. Ciò nasce dal perchè, se un numero è 10 volte maggiore di un altro, il quadrato del primo è 100 volte maggiore del quadrato del secondo.

Qui affianco si vede il centimetro quadrato nella propria grandezza.

MISURE DI VOLUME O DI CAPACITÀ.

215. L'unità di misura di volume è il *metro* cubo, il quale quando si adopera per misurare il legno da bruciare si chiama *stero*. Riguardo a'multipli dello stero, si fa uso del solo *decastero*, e riguardo a'summultipli si fa uso del solo *decistero*.

Digitized by Google

Misure di capacità per i liquidi e per gli aridi.

L' unità di misura per i liquidi e per gli aridi è il decimetro cubo che si chiama *litro* : esso è la millesima parte del metro cubo.

I multipli decimali del litro di cui si fa uso sono il *decalitro* e l' *ettolitro*. I summultipli sono il *decilitro* , ed il *centilitro*.

Se paragoniamo i cubi fatti sulle parti decimali del metro, questi sono di mille in mille volte minori. Così il decimetro cubo , ossia il litro, è mille volte minore del metro cubo; ed il centimetro cubo è mille volte minore del decimetro cubo , e quindi è la milionesima parte del metro cubo. Ciò nasce dal perchè se un numero è dieci volte maggiore di un altro, il cubo del primo è mille volte maggiore del cubo del secondo.

Qui affianco si vede il centimetro cubo nella sua propria grandezza.

Non si fa uso nè del *chilolitro* nè del *millilitro* , il primo del quale è uguale al metro cubo, ed il secondo al centimetro cubo.

MISURE DEI PESI.

216. L' unità di misura dei pesi è il *gramma* o *grammo* , che è il peso nel vuoto di un centimetro cubo di acqua distillata alla temperatura di 4 gradi del termometro centigrado, perchè allora l' acqua ha la massima densità.

Multipli decimali del grammo.

Decagrammo = dieci grammi.
Ettogrammo = cento grammi.
Chilogrammo = mille grammi.

Miriagrammo = diecimila grammi.
Quintale metrico = cento chilogrammi.
Tonnellata metrica = mille chilogrammi.

Summultipli decimali del grammo.

Decigrammo = un decimo del grammo.
Centigrammo = un centesimo del grammo.
Milligrammo = un millesimo del grammo.

MONETE.

217. L' unità delle monete è la *lira* (con nome francese dicesi anche *franco*). Essa è un pezzo di argento coniato del peso di cinque grammi, dei quali, un decimo è rame, e nove decimi è argento puro; perciò la lira contiene grammi 4,50 di argento puro.

Vi sono le monete di argento di 2 lire e di 5 lire, e quelle di 50 centesimi ossia mezza lira, e di 20 centesimi ossia un quinto di lira. Quaranta pezzi di 5 lire, cioè 200 lire pesano giusto un chilogrammo.

Le monete d' oro si coniano sulla base che il valore legale di una moneta di oro equivale a 15 volte e mezzo il valore di una moneta di argento di egual peso. Da ciò segue che un gramma di argento monetato essendo lire 0,20, un gramma d' oro monetato vale lire 0,20×15,5 ossia lire 3,10; ed un chilogramma d' oro monetato vale lire 3100; e perciò 155 pezzi di oro, ciascuno di 20 lire, pesano giusto un chilogrammo.

Partendo da questa conoscenza si trova che la moneta di oro di 20 lire pesa grammi 6,45161, quella di 10 lire pesa grammi 3,22580, e quella di 5 lire pesa grammi 1,61200.

Le monete di rame o bronzo sono coniate sulla base che quella di un centesimo deve pesare un grammo; perciò quella di 5 centesimi pesa 5 grammi, e quella di 10 centesi-

mi pesa 10 grammi. In tal modo le monete di rame possono benissimo servire di pesi quando non sono consumate.

Le monete di rame o bronzo che si coniano sono quelle di 10 centesimi, di 5 centesimi, di 2 centesimi, e di un centesimo.

RIDUZIONE DELLE UNITÀ DI UN ORDINE DEL SISTEMA METRICO DECIMALE IN ALTRE DI ORDINE INFERIORE O SUPERIORE.

218. *Le unità di un ordine del sistema metrico decimale si riducono in unità di ordine inferiore o superiore moltiplicandole o dividendole per 10, 100, 1000, ec. secondo che questo ordine è 10, 100, 1000, ec. volte minore o maggiore.*

Cominciamo dalle MISURE DI PESO, e sieno 985 chilogrammi che vogliansi ridurre in unità di ordine inferiore: si avrà 985*chilogr.*=9850*ettogr.*=98500*decagr.*=985000*gr.* =9850000*decigr.*=98500000*centigr.*=985000000*milligr.*

Se poi vogliansi ridurre in unità di ordine superiore, si avrà *chilogr.* 985=*miriagr.* 98,5=*quintali* 9,85=*ton.* 0,985.

Non tralasciamo osservare che invece di leggere p. es. *9 quintali ed 85 centesimi*, può leggersi *9 quintali ed 85 chilogrammi*, ovvero *9 quintali, 8 miriagrammi, e 5 chilogrammi.*

Per le MISURE LINEARI: sieno p. es. *metri* 7396,45 da ridursi in unità di ordine inferiore, si avrà *metri* 7396,45 = *decimetri* 73964,5=*centimetri* 739645=*millimetri* 7396450.

Volendoli ridurre in unità di ordine superiore, si avrà che *metri* 7396,45 = *decametri* 739,645 = *ettometri* 73,9645 = *chilometri* 7,39645 = *miriametri* 0,739645.

Osserviamo che invece di leggere p. es. 73 ettometri e 9645 diecimilesimi, può leggersi *73 ettometri* e *9645 centimetri*. Si possono anche leggere le cifre ad una ad una coi rispettivi nomi delle unità che rappresentano.

Per le MISURE DI SUPERFICIE: siccome queste sono di 100 in 100 volte minori o maggiori, se i metri quadrati vogliansi ridurre in decimetri quadrati, si debbono moltiplicare per 100, e poi di nuovo per 100 se si vogliono ridurre

in centimetri quadrati. Così 85349 *metri quadrati* sono eguali ad 8334900 *decimetri quadrati*, ed eguali a 853490000 *centimetri quadrati.*

Viceversa, se si vogliono ridurre in *decametri quadrati* ossia *are*, si debbono dividere per 100, e poi di nuovo debbono dividersi per 100 se vogliono ridursi in *ettometri quadrati* o *ettare;* e si avrà che *metri quadrati* 85349=*decametri quadrati* 853,49=*ettometri quadrati* 9,5349.

Il decimetro quadrato essendo la centesima parte del metro quadrato, ne segue che se p. es. si hanno metri quadrati 9,25, si possono leggere così: *9 metri quadrati* e *25 decimetri quadrati.* Analogamente, se si hanno metri quadrati 7,2563, possono leggersi così: *7 metri quadrati* e *2563 centimetri quadrati.* Il numero *Emq.*9,5349 ossia 9 ettometri quadrati e 1349 diecimilesimi, si può leggere così: *9 ettometri quadrati 53 decametri quadrati* e *49 metri quadrati*; ovvero *9 ettometri quadrati*, e *5349 metri quadrati.*

Per le MISURE DI VOLUME: se i metri cubi voglionsi ridurre in decimetri cubi, debbono moltiplicarsi per 1000, e poi di nuovo per 1000 per ridurli in centimetri cubi. Al contrario debbono dividersi per 1000 per ridurli in decametri cubi, e di nuovo per 1000 per ridurli in ettometri cubi.

Così si ha: *metri cubi* 13,14=*decimetri cubi* 13140=*centimetri cubi* 13140000=*decametri cubi* 0,01314.

Se l' unità di volume fosse il litro, che ha i multipli di 10 in 10 volte maggiori ed i summultipli di 10 in 10 volte minori, le riduzioni si farebbero moltiplicando o dividendo successivamente per 10.

Così p. e. *litri* 57,93=*decilitri* 579,3=*centilitri* 5793=*decalitri* 5,793=*ettolitri* 0,5793.

Invece di leggere: *zero ettolitri* e *5793 diecimilesimi*, si può leggere: *zero ettolitri* e *5793 centilitri*, e si possono anche leggere le cifre ad una ad una, o a due a due ec. con i nomi delle rispettive unità.

219. Se si volessero p. es. addizionare 53 chilometri e 27 decimetri, considerando i decimetri come parti decimali del chilometro preso per unità; si osserva che i decimetri sono

diecimilesimi del chilometro, perciò la somma sarà chilometri 53,0827.

Parimenti, se p. es. volessero addizionarsi 28 decalitri con 56 centilitri, considerando i centilitri come parti decimali del decalitro preso per unità, si osserva che i centilitri sono millesimi del decalitro, perciò la somma sarà decalitri 28,056.

220. I nomi delle unità dei diversi ordini del sistema metrico decimale si scrivono in modo abbreviato con le due iniziali una del multiplo o sottomultiplo dell' unità, e l' altra è l'iniziale di questa stessa unità. L' iniziale del multiplo si fa maiuscola, e quella del summultiplo minuscola. Così p. es. se l' unità fosse il metro, e si avessero 54 *chilometri*, 35 *decimetri*, 628 *metri*, 72 *decametri*, 23 *centimetri*, e 9 *miriametri*; si scriveranno come qui appresso.

*Cm*54, *dm*35, *m*628, *Dm*72, *cm*23, *Mm*9.

Parimenti: 58 *chilogrammi*, 24 *decigrammi*, 16 *quintali*, 13 *Ettogrammi*, 6 *tonnellate*, si scriveranno così

*Cg*58, *dg*24, Q16, *Eg*13, *T*6.

Allorchè l' unità è il metro quadrato o cubo, le iniziali sono tre, cioè le due predette, e la iniziale *q* del quadrato, ovvero *c* del cubo.

Così, se si trattasse di 52 *metri quadrati*, 75 *decametri quadrati*, 36 *centimetri quadrati*, si scriveranno come segue

*Mq*52, *Dmq*75, *cmq*36.

221. *L' addizione dei numeri che sono multipli e sottomultipli della medesima unità del sistema metrico decimale, si fa riducendoli prima a questa unità, e poi si addizionano.*

Così avendosi
*Cg*53+*dg*425+*mg*67+*Dg*34+*Q*15+*g*26.
Si riducono i numeri dati tutti a grammi, e si pongono uno sotto l' altro, come si vede qui affianco, e poi si addizionano, e si avrà per somma 1559408 grammi e 567 milligrammi.

59000
42,5
0,067
340
1500000
26
1559408,567

Digitized by Google

Sieno inoltre da addizionarsi
$Dmq32+mq57+cmq895+Emq64+dmq36$.
Si ridurranno prima tutti i numeri in metri quadrati come si vede qui di contro, e poi si addizionano, e si avrà per somma 643257 metri quadrati, e 4495 centimetri quadrati.

3200
57
0,0895
640000
0,36
643257,4495

RAGGUAGLIO DELLE MISURE DEL SISTEMA METRICO DECIMALE ALLE MISURE NAPOLITANE; E VICEVERSA.

222. Il numero per cui si debbono moltiplicare le misure di un sistema metrico per ridurle in misure di un altro sistema si chiama *riduttore* delle misure del primo sistema rispetto al secondo.

Questo stesso numero denota il *ragguaglio* fra le unità del primo sistema e quelle del secondo sistema.

Ecco qui appresso i ragguagli fra le principali misure decimali e le napolitane.

223. Un metro è uguale a palmi 3,78 esattamente (*).

Un metro quadrato è uguale a palmi quadrati 14,2884 (**).

L'ara è moggi nuovi 0,142884, cioè $\frac{1}{7}$ di moggio, con un errore in meno minore di mezzo centomilesimo.

Un metro cubo è palmi cubici 54,010152=tomoli 18,0033.

Un ettolitro è uguale a tomoli 1,800 (***).

(*) In effetti, il quadrante del meridiano terrestre è uguale a 90 gradi ed il grado essendo 60 miglia, il quadrante è miglia 5400, e siccome il miglio è 7000 palmi, il quadrante è uguale a palmi 37800000; ma lo stesso quadrante è uguale a 10000000 di metri; perciò si ha che metri 10000000=palmi 3780000; dunque un metro solo è la diecimilionesima parte di palmi 37800000; perciò esso viene eguale a palmi 3,78.

(**) Perchè il quadrato di un metro equivale al quadrato di palmi 3,78 che è palmi quadrati 14,2884.

(***) Perchè il cubo del metro, ossia di palmi 3,78 è 54,010152; ed essendo il tomolo 3 palmi cubi, se si divide il precedente numero per

Un litro è uguale a caraffe 1,375(*).
Un chilogrammo è uguale a rotoli 1,12233.
Un gramma è uguale a trappesi 1,12233 (**).
Una lira è uguale a grani 23,53 (***).
Ciò premesso, conoscendosi che il metro è palmi 3,78, se p. es. si volessero ridurre metri 15,4 in palmi, è chiaro che conviene moltiplicare 3,78 per 15,4; e si trova che metri 15,4 fanno palmi 58,218. La stessa cosa si dirà delle altre misure decimali che si volessero ridurre in napolitane.

Viceversa, se i palmi si volessero ridurre in metri bisognerebbe dividere i palmi per 3,78; perchè siccome i metri moltiplicati per 3,78 danno per prodotto i palmi, viceversa, il prodotto diviso pel fattore 3,78 deve dare per quoziente l' altro fattore che esprime i metri. La stessa cosa si dica per le altre misure napolitane che si volessero ridurre in decimali.

Quindi si vede che se si divide l' unità per i numeri 3,78, 14,2884, 54,010152, 1,8000, 1,12233, 23,536, si troverà quant' è un palmo rispetto al metro, un palmo quadrato rispetto al metro quadrato, un palmo cubico rispetto al metro cubico, un tomolo rispetto all' ettolitro, un rotolo rispetto al chilogrammo, un grano rispetto alla lira, ed il ducato, che è 100 volte maggiore del grano, rispetto alla lira.

Fatte queste divisioni, si hanno i *riduttori* delle misure

3, si avrà il valore del metro cubo rispetto al tomolo, e quindi anche quello dell'ettolitro (ch'è un decimo del metro cubo) rispetto al tomolo.

(*) Ciò si ricava dall' essere un barile 3 palmi cilindrici, ossia palmi cubici 2,3361949.

(**) Ciò perchè il gramma ed il trappeso sono le rispettive parti millesime del chilogramma e del rotolo, quindi hanno fra loro la stessa relazione che è fra il chilogrammo e il rotolo. È osservabile poi che il numero il quale esprime quant' è il chilogrammo rispetto al rotolo si forma dalle cifre 1, 2, 3 scritte due volte, e la prima dinota un' unità.

(***) Ciò si vedrà quando tratteremo del valore al pari delle monete.

napolitane nelle decimali, cioè si hanno i numeri che esprimono i ragguagli delle misure napolitane alle decimali. Essi sono i seguenti, ai quali abbiamo aggiunto il miglio che è 7000 palmi.

Un palmo è uguale a metri 0,26455.

Un miglio è uguale a metri 1852.

Un palmo quadrato è uguale a metri quadrati 0,0700.

Un palmo cubico è uguale a metri cubici 0,0185150.

Un tomolo è uguale ad ettolitri 0,55545.

Una caraffa è uguale a litri 0,7270.

Un rotolo è uguale a chilogrammi 0,89100.

Un ducato è uguale a lire 4,2500.

Ma quando non si sanno a mente questi numeri, o non si ha pronto un libro per riscontrarli; basta tenere a mente i soli riduttori delle misure decimali nelle napolitane, perchè mediante la divisione si potranno ridurre le misure napolitane in misure decimali.

SISTEMA METRICO NAPOLITANO ANTERIORE ALLA LEGGE DEL 1840.

224. L' unità lineare per gli usi di commercio era il *palmo*. Esso dividevasi in 12 *once*, l' oncia in 5 *minuti*, ed il minuto in 10 *punti*. Otto palmi formavano una *canna*.

Gli Architetti facevano uso della *pertica* di 10 palmi.

Per le misure agrarie l' unità lineare era il *passo agrario* uguale a 7 palmi ed un terzo.

Per le misure geografiche si usava il *passo geografico* (*) uguale a 7 palmi; perciò era diverso del passo agrario.

(*) Con questo passo, detto anche *passo geodetico* (che equivale a metri 1,851851), furono fatti i scandagli della profondità delle acque marine delle coste delle due Sicilie; e queste profondità furono segnate sulle carte idrografiche da numeri che esprimono passi.

L' unità di superficie per le misure comuni era il *palmo quadrato*, e solevasi anche far uso della canna quadrata.

Per i suoli edificatori si usava il *palmo suolare*, che è una superficie lunga 60 palmi e larga un palmo=60 pal. quad.

Per le misure agrarie l' unità di superficie era il *moggio*, cioè un quadrato avente per lato 30 passi agrarii, ossia 220 palmi. Esso dividevasi in 10 *quarte*, la quarta in 9 *none*, e la nona in 5 *quinte*: e però un moggio era 450 *quinte*.

L' unità di volume distinguevasi in unità di *capacità* per i liquidi e per gli aridi, ed in unità di *solidità* per le fabbriche, per il legno, pel marmo, pei metalli, ecc.

L' unità di misura per l' acqua e pel vino era il *barile* che dividevasi in 60 *caraffe*. Dodici barili formavano una *botte*, e due botti formavano un *carro*.

L' unità di misura per l' olio era lo *staio*. Esso dividevasi in 16 *quarti*, ed il quarto in 6 *misurelli*. Lo staio poi in peso eguagliava rotoli dieci ed un terzo. Sedici staia formavano la *salma*. Di questa salma si fa uso tuttavia nelle contrattazioni della Borsa di Napoli, e perciò essa equivale a rotoli 165 $\frac{1}{3}$. La *botte* di olio equivale a salme 2 $\frac{3}{4}$, ossia a 44 staia, e quindi a rotoli 454 $\frac{2}{3}$.

Uno staio in volume è uguale a litri 10,1710; ed il litro è uguale a staia 0,0983.

Lo staio paragonato alla caraffa è uguale a caraffe 13,983.

L' unità di misura per gli aridi, come pel grano, noci, legumi, ec. era il *tomolo*. Esso dividevasi in 4 *quarte*, e la quarta in 6 *misure*; quindi il tomolo era uguale a 24 *misure*.

L' unità di solidità per misurare le fabbriche era un quarto di canna cubica, che chiamavasi canna di *costumanza*.

La medesima unità si usava per le legna da ardere.

L' unità di peso era il *rotolo*. Esso si divideva in *once* 33 $\frac{1}{3}$ l' oncia in 10 *dramme*, la dramma in 3 *trappesi* o *scrupoli*,

e lo scrupolo in 20 *acini* o *grani* : e però il rotolo veniva a dividersi in 1000 trappesi. (*)

Per i grandi pesi si prendeva per unità il *cantaio* equivalente a 100 rotoli.

La calce si misurava e suole ancora misurarsi con un' unità detta *peso* equivalente a 40 rotoli.

Per taluni generi si prendeva per unità la *libbra*. Essa dividevasi in 12 *once* uguali a quelle del rotolo; e quindi l'oncia veniva a dividersi in 30 trappesi, ed in 600 acini. (**)

L'unità di moneta era il *ducato*: esso si divideva in 10 *carlini*, il carlino in 10 *grani*, ed il grano in 12 *cavalli* o *calli* (***).

(*) Quest'unità media più grande della libbra si adottò dopo della libbra, e volendola composta di parti decimali, era utile formarla in modo che ciascuna di queste parti decimali fosse stata eguale ad una parte aliquota della libbra ; e ciò non poteva farsi diversamente che formando il rotolo di 1000 trappesi ; e quindi risultava composto di once 33 $^1/_3$.

Essendosi investigato a qual peso corrispondesse un cubo di oro puro avente per lato un'aliquota del palmo, si trovò che il cubo di oro puro di un decimo di palmo pesa giusto 400 trappesi; quindi 10 di questi cubi fanno 4 rotoli. Ecco perchè il peso di 4 rotoli si chiamò *decina* , ed anche oggi si costuma di pesare la carne di porco, il lino, la canape, e la lana con l' unità di peso detta *decina* che equivale a 4 rotoli. Ma la decina del lino, che ancora si costuma in Napoli è di rotoli 4 e mezzo quarto. Facciamo inoltre osservare che un palmo cubico di oro puro pesa giusto 4 cantaia.

(**) L' *oncia* moneta in origine era in Napoli del medesimo peso che l' oncia peso, e l' una e l' altra dividevansi in 30 parti eguali dette *tari*, ed il tarì si divideva in 20 parti eguali dette *grani*: ma per nominare i *tarì-pesi*, le due parole si riunirono in una dicendosi *trappesi* , i *grani* pesi si dissero anche *acini*. In Sicilia la moneta si conta ancora ad *once*, dividendosi l' *oncia* in 30 carlini detti *tarì* , ed il tarì in 20 *tornesi*.

(***) Questa moneta coniata in tempo degli Aragonesi fu così nominata perchè su di essa era l' effigie del cavallo, simbolo di Napoli: il dialetto Napolitano che cerca abbreviare ridusse la parola a *callo*.

SISTEMA METRICO NAPOLITANO SANZIONATO CON LEGGE DEL 6 APRILE 1840.

225. Ecco il testo della legge.

» La base dell' intero sistema, il *palmo*, è la settimilesima
» parte di un minuto primo del grado medio del meridiano
» terrestre, ovvero la settimilesima parte del miglio geogra-
» fico d'Italia, o miglio nautico di sessanta a grado. Esso sa-
» rà diviso in parti decimali, e 10 palmi formano la *canna*.

» La Canna lineare, la Canna quadrata, e la Canna cuba
» sono le unità di misura di lunghezza, di superficie, e di
» solidità per tutti gli usi. La prima è uguale a dieci palmi
» lineari, la seconda a cento palmi quadrati, e la terza a
» mille palmi cubi.

» L' unità superficiale delle misure agrarie sarà il *moggio*
» di diecimila palmi quadrati, o sia un quadrato che abbia
» uno de' lati cento palmi, o canne dieci. Esso sarà diviso in
» parti decimali. Il moggio antico è moggi nuovi 4,84.

» Il *tomolo* è l' unità delle misure di capacità per gli ari-
» di. Esso equivale a tre palmi cubi, e si divide in due *mez-*
» *zette* o in quattro *quarte*, o pure in ventiquattro *misure*,
» ciascuna delle quali uguaglia il cubo del mezzo palmo.

» La misura degli aridi sarà praticata sempre a *raso*, e
» non a *colmo*.

» Il *barile* è l' unità delle misure di capacità per alcuni
» dei liquidi, come il vino, l' aceto, l' acqua, e si divide in
» sessanta *caraffe* (*).

» Esso equivale ad un cilindro retto del diametro di un
» palmo, e di tre palmi di altezza.

» La *botte* si compone di dodici barili, ed è perciò uguale

(*) Una caraffa di acqua in peso è uguale ad once 27 $^{1}/_{10}$.

» ad un cilindro retto di tre palmi di diametro, e quattro
» palmi di altezza.

» L'olio sarà misurato sempre a peso ; cioè a cantaia , a
» rotoli, ed a frazioni decimali di rotolo.

» Pel commercio a minuto potrà misurarsi a capacità; le
» misure dovranno essere di figura cilindrica e corrispon-
» denti al peso di olio che debbono contenere alla tempera-
» tura di 20° del termometro centigrado.

» Il *rotolo* è l'unità di misura de' pesi , e si dividerà in
» parti decimali: la sua parte millesima è il *trappeso*.

» Il *cantaio* si compone di cento rotola.

» Un palmo cubo di acqua distillata pesa in Napoli , nel-
» l'aria, rotola 20 e 736 trappesi alla temperatura di 16°,144
» del termometro centigrado (12°,92 di Reaumur) ed alla
» pressione barometrica di palmi 2,865 ossia di 28 pollici
» ossia di 76 centimetri. (*)

(*) In una Memoria su i pesi e misure d'Italia confrontate col sistema metrico decimale, inserita nella 3.ª parte di un Opuscolo del *signor Saverio Scrofani* pubblicati in Napoli nel 1812 , si trovano esposte le misure della Città di Napoli verificate da un'apposita Commessione: e noi, siccome questo sistema era il migliore di tutti gli altri di Europa, dopo il sistema metrico decimale , per onore del paese diamo qui un cenno dei lavori fatti dalla detta Commessione.

L'antico campione del palmo si trovò eguale a metri 0,26367, e perciò un metro è uguale a palmi antichi 3,792620.

L'antico tomolo napoletano si misurò 84 volte con tutte le diligenze, e poi se ne prese il medio, e si trovò eguale a litri 55,3189246.

Il barile si misurò 26 volte, ed il medio risultò litri 43,6737878.

Il Colonnello Visconti nella sua Memoria inserita negli atti dell'accademia delle Scienze del 1838 sotto il titolo *sistema metrico uniforme delle due Sicilie* fece osservare che il tomolo affinchè eguagliasse 3 palmi cubici, il palmo invece di essere eguale a metri 0,26367 , avrebbe dovuto farsi eguale a metri 0,2641941.

Inoltre osservò che il barile affinchè eguagliasse 3 palmi cilindrici , il palmo avrebbe dovuto farsi eguale a metri 0,2646495.

Per convertire i rotoli in libbre si riducono prima in trappesi moltiplicandoli per 1000, poi dai trappesi che ne risultano si ricavano le once dividendoli per 30, ed al quoziente si aggiungono anche le once date, se con i rotoli erano date anche once; infine dalle once risultanti si ricavano le libbre dividendole per 12.

Viceversa le libbre si convertono in rotoli riducendole prima in once e poi in trappesi moltiplicandole per 12 e per 30, ed il prodotto si divide per 1000, e si avranno i rotoli.

Ma siccome il palmo doveva farsi eguale a metri 0,26455 affinchè fosse stato una parte aliquota del meridiano terrestre, e propriamente la 7000ma parte del minuto, ossia del miglio italiano, convenne fare il tomolo eguale a litri 55,5451131 affinchè fosse stato eguale a 3 palmi cubici nuovi; e convenne fare il barile eguale a litri 43,6250298 affinchè fosse stato eguale a 3 palmi cilindrici nuovi. Perciò il nuovo tomolo supera l' antico di litri 0,2261885; ed il nuovo barile è minore dell' antico di litri 0,0487580.

Da qui si rileva che il nuovo palmo è uguale all' antico più 0,00534 dell' antico; ed il nuovo tomolo è uguale all' antico più 0,00408; ed il nuovo barile è uguale a 0,99888 dell' antico, e quindi la nuova caraffa è pure 0,99888 dell' antica.

Il rotolo poi del nuovo sistema metrico è rimasto eguale all' antico.

Da questi dati il Visconti ne deduceva che il vecchio palmo in origine doveva essere uguale al nuovo, e perciò aveva un rapporto esatto col miglio; e la picciola differenza dovevasi attribuire agli errori di costruzione nel rifare i campioni resi logori dal tempo.

Il Visconti fu il primo a dimostrare che il sistema metrico di Napoli godeva tutte le qualità di un buon sistema metrico, facendo vedere come tutte le misure potevano derivare con rapporti semplici ed esatti dall' unità lineare, e questa essere una parte aliquota del quarto del meridiano terrestre. Difatti, egli trovò che un' oncia cubica di acqua distillata, cioè il cubo di un dodicesimo di palmo, pesa 12 trappesi alla pressione barometrica di 28 pollici ed alla temperatura di 16° $^{1}/_{6}$ C., che è presso a poco quella portata dalla legge, e che può dirsi la media di Napoli. Quindi un palmo cubico, che equivale a 1728 once cubiche, pesa 20 rotoli e 736 trappesi. Un rotolo poi eguaglia la dodicesima parte del cubo che ha per lato 10 once ossia $^{5}/_{6}$ di palmo, ripieno di acqua distillata alla detta temperatura e pressione.

ANTICO SISTEMA METRICO FRANCESE.

226. L'unità lineare era il *piede* che si divideva in 12 *pollici*, il pollice in 12 *linee*, e la linea in 12 *punti*. Sei piedi formavano la *tesa*.

Vi era un' altra unità detta *auna*, che si usava per i generi di telerie, di seterie, e di pannine. Essa era uguale a 3 piedi, 7 pollici, 10 linee, e 10 punti; ed era eguale a metri 1,18844 , ed a *palmi* napolitan i 4,4923.

Per le grandi distanze vi era la *lega comune* di 25 a grado, e la *lega marina* di 20 a grado.

Il piede è uguale a metri 0,32484 ed a palmi napoletani 1,2279.

Per le misure agrarie vi era la *pertica* di acque e foreste, che era un quadrato avente per lato 22 piedi. L' *arpento* delle acque e foreste si componeva di 100 di queste pertiche.

La *pertica* di Parigi era un quadrato avente 19 piedi di lato, e 100 di queste pertiche formavano l' *arpento* di Parigi.

Le misure di capacità per gli aridi erano il *sestier* (sestiero) che dividevasi in 12 *boisseau* (bossò), ed il boisseau in 12 *litrons* (litroni). Il sestier è uguale a litri 156; il boisseau a 13 litri; ed il litron a litri 0,8125.

Per i liquidi vi era il *muid* (moggio) che si divideva in 2 *feuillette* (fogliette), e la foglietta in 144 *pintes* (pinte).

Il moggio era eguale a litri 264.

Vi era la *tonnellata* di mare, del volume di piedi cubi 42 = metri cubi 1,44.

L' unità di peso era la *libbra* che dividevasi in 16 *once*, l' oncia in 8 *grossi*, il grosso in 24 *scrupoli*, e lo scrupolo in 3 *grani*. Una mezza libbra dicevasi *marcò*.

Una libbra è uguale a grammi 489,51, ed è uguale a *trappesi* napoletani 539,391 = *once* napoletane 18 $^{1}/_{3}$.

L' unità di moneta era la *lira tornese* = 0,99 di franco. Essa si divideva in 20 *soldi*, ed il soldo in 12 *danari*.

SISTEMA METRICO INGLESE.

227. L' unità di misura lineare è il *piede*, che si divide in 12 *pollici*, ed il pollice in 10 *linee*. Il piede è uguale a metri 0,30479, ed a palmi napoletani 1,15212.

Il *yard* o *auna* è uguale a 3 piedi. Il *fathom* di 6 piedi. Il *furlong* di 220 yard. Il *pole* o *pertica* di yard 5 1/2.

Il *miglio* di 1750 yardi — Vi è pure il miglio marino che è eguale all'italiano di 60 a grado.

Per le misure di superficie vi è il *yard quadrato* = metri quadrati 0,83610, il *rod* ossia pertica quadrata. ed il *rood* di 1210 yard quadrati. Vi è l'*acre* che è uguale a 4840 yard quadrati.

Per le misure di capacità per gli aridi ed anche per taluni liquidi, come la birra, si fa uso del *gallone imperiale* che si divide in 8 pinte, ed è uguale a litri 4,54345797 = caraffe napolitaue 6,248877.

Vi è il *peck* di due galloni. Il *bushel* di 8 galloni. Il *sack* di 3 bushel. Il *quarter* di 8 bushels. Il *chaledron* di 12 sack.

Vi è un altro *gallone* per il vino, rum, ed altri liquori, il quale è uguale a litri 3,90, ed a caraffe napoletane 5,37186.

Per i pesi vi sono due specie di libbre, una detta *libbra troy* per gli oggetti preziosi, che è uguale a grammi 373,238 = *once* napolitane 13 e *trap*. 28,7.

Essa si divide in 12 once, e l'oncia in 20 *penni* (pennyweight) o *danari*, ed il penni in 24 *grani*.

L'altra detta libbra *avoir du poid*, Per gli usi di commercio, si divide in 16 *once* e l'oncia in 16 *dramme*. Essa è uguale a grammi 453,558 = *once* napolitane 16 e *trap*. 29,04.

Vi è il *quintale* di 112 libbre *avoir du poid*, e la *tonnellata* di mare di 20 quintali = chilogr. 1016,65 = *rotoli* napolitani 1139,9.

L'unità di moneta è la *lira sterlina* o *Sovrano* (di oro) del peso di grammi 7,987. Essa è uguale a lire italiane 25,21.

Vi è il pezzo di 5 Sovrani, e di mezzo Sovrano, e la *Ghinea* che è uguale a lire italiane 26,47, e si divide in mezzi, terzi, e quarti. Il Sovrano è di 20 scellini antichi, e la ghinea di 21.

Il titolo delle monete di oro è di 0,916; e quello delle monete di argento è di 0,925.

Le monete di argento sono la *corona* anteriore al 1818 di 5 scellini antichi, ed uguale a lire italiane 6,18; la corona dopo del 1818 eguale a 5 scellini nuovi = lire italiane 5,81. Vi è la mezza corona, e lo scellino (*six pence*) del peso di grammi 5,650, ed uguale a lire italiane 1,16. Vi sono 1/2, 1/3, 1/4, 1/6, 1/12 di scellino. Il dodicesimo vien detto *pence* o *danaro*.

Le monete di bronzo sono il *pence* e le parti dello stesso.

CAP. VIII.

Titolo. — Valore nominale e reale dell' oro e dell' argento. — Cambio, e valore al pari delle monete.

TITOLO DELL' ORO E DELL' ARGENTO.

228. L' oro e l' argento non possono aversi mai puri senza costose operazioni; perciò si preferisce adoperarli alquanto impuri, il che giova ad aumentarne la durata.

Si chiama *titolo* di una massa di oro la quantità di oro puro contenuto nella massa, paragonata al peso di tutta la massa. Perciò:

Il titolo di una massa d' oro si ottiene dividendo il peso dell'oro puro contenuto nella massa pel peso di tutta la massa.

Così p. es. se una massa di oro impuro del peso di 24 grammi tiene 20 grammi di oro puro, il titolo è $^{20}/_{24}$; cioè il peso dell' oro puro rispetto al peso totale della massa impura è $^{20}/_{24}$ del peso di tutta la massa.

Ciò che si è detto dell' oro si dica anche per l' argento.

Ordinariamente il peso dell' intera massa si concepisce diviso in 1000 parti eguali, e perciò, se p. es. 900 di queste parti sono di oro puro, si dirà che il titolo è di 0,900. Lo stesso si dica dell' argento.

In una massa di oro impuro, fra il peso dell' oro puro, il peso totale della massa, ed il titolo esiste la relazione che passa fra il dividendo, il divisore, ed il quoziente; e però:

Il peso dell' oro puro si ottiene moltiplicando il peso di tutta la massa per il titolo. — Il peso di tutta la massa si ottiene dividendo il peso dell' oro puro per il titolo.

Nei lavori di oreficeria si usa esprimere il titolo in *carati*,

dividendosi il peso di tutta la massa in 24 parti eguali dette *carati*; e così se 18 di esse parti sono di oro puro ed altre sei di altro più vile metallo che ordinariamente è rame, si dice che l'oro è di 18 carati; il che equivale a dire che il titolo è di 0,750.

È stato provato che la lega la quale dà maggior durata all' argento si ottiene allegandolo al rame col titolo di $^{11}/_{12}$, cioè mescolando 11 parti argento puro ed una di rame.

In Napoli nei lavori comuni di oreficeria, il titolo dell' oro si usa di 12 carati; e perciò i lavori sono metà di oro e metà di rame, e qualche volta vi è pure argento.

Riguardo poi all' argento, sia lavorato sia monetato, si usava il titolo di $^{10}/_{12} = ^{5}/_{6} = 0,333\ ^{1}/_{3}$, che nell' argento lavorato si bolla col numero 7. Affianco al numero è impressa la testa di Partenope, simbolo di Napoli, e la lettera *N* per indicare che è lavoro nostrale; ponendosi la lettera *E* quando è lavoro estero,

Lo stesso bollo si pone sull' oro lavorato, variandosi il numero a seconda del titolo o dei carati nel seguente modo. Il numero 6 vuol dire che l' oro è di 12 carati o più, ma al di sotto di 14; il numero 5 vuol dire che l'oro è di 14 carati o più, ma al di sotto di 16; il numero 4 indica essere di 16 carati o più, ma al di sotto di 18; il numero 3 dinota essere di 18 carati o più, ma al di sotto di 20; il numero 2 indica essere da 20 a 22 carati, ed il numero 1 da 22 a 24 carati.

Questo *bollo di garantia* si mette sull'oro e sull'argento all'Offizio della Zecca dove gli orefici sono obbligati a portare gli oggetti, sia nostrali sia esteri, per farli bollare, senza di che è proibito esporli in vendita.

Nelle antiche provincie del Regno italiano sono due i titoli legali tanto per l' oro che per l' argento, i quali vengono garantiti dal *bollo* o *marchio* che i spacciatori degli oggetti sono obbligati di farvi apporre dai *saggiatori* destinati dal Governo.

Per i lavori di oro il primo titolo (che poco si usa) è di 0,840; ed il secondo è di 0,750 ossia di 18 carati.

Per i lavori di argento il primo titolo è di 0,850, ed il secondo è di 0,800.

Il primo titolo dell' oro per i grossi lavori si bolla con un' aquila coronata che porta in petto il numero 1, e per i piccioli lavori si bolla con una testa di aquila rivolta verso la dritta dello spettatore.

Il secondo titolo dell' oro per i grossi lavori si bolla con una croce

coronata che ha in mezzo il numero 2; e per i piccioli lavori si bolla con una testa di aquila rivolta verso la sinistra dello spettatore.

Il primo titolo dell' argento per i grossi lavori si bolla con un'aquila coronata che porta in petto una croce, e per i piccioli lavori, con una testa di leone rivolta verso la dritta dello spettatore. Il secondo titolo dell' argento per i grossi e piccioli lavori si bolla con una testa di leone rivolta verso la sinistra dello spettatore.

Su i lavori prevenienti dall' estero si aggiunge una cifra composta delle tre lettere intrecciate E, S, T.

Il titolo della moneta del Regno italiano, sì per l' oro che per l' argento è di 0,900. La lega del bronzo è di $^{24}/_{25}$ rame ed $^{1}/_{25}$ stagno (*).

229. Siccome è difficile coniare le monete del preciso titolo e del preciso peso stabilito dalla legge, così la legge stessa ammette che si possa eccedere in più o in meno nel peso e nel titolo, il che dicesi *tolleranza* di peso, o di titolo. La tolleranza di titolo per le monete di oro e di 2 millesimi del loro peso, in più o in meno, e di 3 millesimi per l' argento. La tolleranza di peso nelle monete di oro di 20 e di 10 lire è di 2 millesimi del loro peso; in quella di 100 lire è di un millesimo, ed in quella di 5 lire di 3 millesimi.

La tolleranza di peso nella moneta di argento di 5 lire è di 3 millesimi del suo peso, in quella di 2 lire è di 5 millesimi, in quella di 50 centesimi è di 7 millesimi, ed in quella di 20 è di 10 millesimi.

Le monete con l' uso si consumano: e l'esperienza ha mostrato che lo *strugimento* nella moneta di 5 lire fa perdere ad essa 4 milligrammi del suo peso in ogni anno.

(*) Per evitare l' estrazione delle monete italiane di argento procurata dai manifatturieri di monete nella Svizzera, i pezzi di argento al di sotto di 5 lire coniate dal 1861 in poi sono del titolo di 0,835.

Ora si è fatta una convenzione fra la Francia, l' Italia, il Belgio, e la Svizzera, di adoperare lo stesso titolo di 0,835 per le monete di argento.

Digitized by Google

VALORE NOMINALE E REALE DELLE MONETE.

230. Il valore *nominale*, *estrinseco*, o *legale* di una moneta è il valore che le viene attribuito dalla legge.

Il valore *reale* o *intrinseco* è quello che essa ha come merce, indipendentemente dalle spese di fabbricazione e da quel valore che le può dare la legge.

Anche l' oro e l' argento lavorato cioè quello di oreficeria ha il valore intrinseco, che è quello indipendente dalla spesa più o meno elevata della manifatturazione.

Nelle monete di oro e di argento vi è poca varietà fra il valore intrinseco e l' estrinseco, essendo la differenza la sola spesa cagionata dalla coniazione.

Ma nella moneta di rame e di bronzo il valore nominale è tre o quattro volte più grande del valore reale.

Il Governo, che solo ha il dritto di coniare la moneta, ne dà l' incarico ad impresarii; e paga ai medesimi circa lire 8,44 per ogni chilogramma di oro coniato, e lire 2,72 per ogni chilogramma di argento coniato (*).

Per avere il valore nominale di un chilogramma di argento puro monetato al titolo di 0,9; osserviamo che siccome 2 lire pesano 10 grammi, dei quali 9 sono di argento puro, ne segue che 9 grammi di argento puro valgono 2 lire, quindi un grammo vale la nona parte di 2 lire, cioè lire

(*) Nell' ultimo appalto fatto dal Governo con la Banca nazionale, il compenso per la monetazione si è pattuito a lire 7,444... il chilogrammo per l' oro, ed a lire 1,7222... per l' argento; e ciò per l' uso gratuito degli edifizi e degli utensili atti alla monetazione concessi dal Governo alla Banca. Le monete di bronzo si sono pagate da lire 4,50 sino a lire 6,20 il chilogrammo compresa la pasta metallica. E siccome un chilogrammo di bronzo monetato vale 10 lire, il Governo guadagna quasi il doppio sulla moneta di bronzo.

0,2222...; perciò un chilogrammo di argento puro monetato vale lire 222,222...

Il valore reale o intrinseco della moneta di argento si ottiene togliendo dal valore nominale la spesa erogata per la sua fabbricazione, che è di lire 2,72 per ogni chilogrammo di argento monetato. Perciò il valore intrinseco di un chilogrammo di argento monetato sarà lire 219,50.

Si ha il valore nominale dell'oro monetato, ricordando (n.° 227) che 155 pezzi di 20 lire pesano giusto un chilogrammo; e perciò 1000 grammi di oro monetato valgono lire 3100 ; e siccome 900 di questi sono di oro puro, ne segue che 900 grammi di oro puro valgono lire 3100, quindi un grammo vale la 900ma parte di lire 3100 , ossia lire 3,444...; perciò un chilogrammo di oro monetato vale lire 3444,444...

Ora se togliamo da questo valore di un chilogrammo di oro monetato la spesa di lire 8,44 che si richiede per la coniazione, si ottiene il valore intrinseco di un chilogrammo di oro monetato che viene lire 3436.

CAMBIO DELLE MONETE.

231. Si dice *cambio delle monete* la permutazione che si fa di oro o di argento puro per moneta. Questa permutazione si pratica nell'Amministrazione della Zecca , dove un particolare può portare oro o argento, per averne in cambio moneta; ma in questo cambio l'Amministrazione tiene conto della sola qnantità di oro o di argento puro , senza calcolare affatto le spese di manifatturazione e di altri ornamenti che potrebbero essere negli oggetti di oro o argento, i quali vogliono cambiarsi in moneta.

Tale cambio viene regolato sulla base che un chilogrammo di oro puro equivale a lire 3436, ed un chilogrammo di argento puro equivale a lire 219,50, (n.° 230).

Digitized by Google

Passiamo ora a risolvere il seguente

Problema. *Quanto vale al cambio delle monete un candeliere di argento del titolo di 0,833 che pesa chilogrammi 2,68?*

Troveremo prima la quantità di argento puro contenuto nel candeliere prendendo 833 millesimi del suo peso, cioè moltiplicando 2,68 per 0,833; e tale quantità risulterà eguale a 2,23244. Dopo ciò, siccome si conosce che un chilogrammo di argento puro vale lire 219,50, ne segue che chilogrammi 2,23244 debbono valere un numero di lire 219,50×2,23244=490,02458.

VALORE AL PARI DELLE MONETE.

232. Si ha il valore *al pari* di due monete di oro, allorchè si paragona la sola quantità di oro puro che è in una alla quantità di oro puro che è nell' altra, senza curarsi del valore del rame ed anche dell' argento che potrebbe trovarsi alligato con l' oro. Lo stesso si dica del valore al pari di due monete di argento.

Da qui si vede che per conoscere il valore al pari di due monete conviene dividere il peso dell' oro o argento puro contenuto in una, pel peso dell' oro o argento puro contenuto nell' altra.

Sia p. es. da trovarsi il valore al pari della *lira* italiana rispetto alla *piastra* napolitana.

La *lira* italiana pesa grammi 5, ed è del titolo di 0,900; perciò essa contiene grammi 4,5 di argento puro. La *piastra* napolitana pesa grammi 27,532 (ossia trappesi napolitani 30,9), ed il suo titolo è 0,833 $^1/_3$; quindi l' argento puro contenuto nella piastra è 27,532×0,83333=22,94324, arrestandosi a cinque decimali. Dunque si ottiene il valore al pari della lira rispetto alla piastra dividendo 4,50 per 22,94324, e risulta eguale a 0,196136. Volendo poi il valore della lira rispetto al *grano* che è 120 volte minore della pia-

stra, si moltiplicherà il risultato ottenuto per 120 e si trova che la lira è uguale a grani 23,536.

Se si facesse il calcolo rispetto alle lire coniate nel 1863 che sono del titolo di 0,835, si trova che la lira equivale a grani 21,83.

CAP. IX.

Numeri complessi o denominati.

233. Nelle applicazioni dell' aritmetica agli usi sociali i numeri generalmente rappresentano unità di una certa specie, cioè sono numeri concreti; e queste unità, secondo le usanze dei diversi paesi, si dividono e suddividono in parti che hanno diverse denominazioni.

Diconsi numeri *complessi o denominati* i numeri concreti le cui unità non si dividono in parti decimali, ma si dividono e suddividono in un numero di parti stabilito dall'uso.

Ne' numeri complessi quell' unità che si divide e suddivide in parti più picciole si chiama *unità principale*. Le parti nelle quali essa si divide e suddivide diconsi *unità secondarie*, e distinguonsi in diverse *specie*, secondo la loro diversa grandezza: le più piccole diconsi unità dell' *infima specie*.

Così p. es. il giorno dividendosi in 24 ore, l' ora in 60 minuti primi, ed il minuto primo in 60 minuti secondi; il giorno è l' unità principale, le ore, i minuti primi, ed i minuti secondi sono le unità secondarie delle diverse specie; e se il minuto secondo non si concepisce diviso in parti più picciole, i minuti secondi sono le unità dell' infima specie.

Allorchè si tratta di eseguire le quattro operazioni fondamentali su i numeri complessi, evvi bisogno di talune par-

ticolari avvertenze che formeranno l' oggetto di questo capitolo; cominceremo dunque dalle RIDUZIONI di questi numeri.

RIDUZIONE DELLE UNITÀ DI UNA SPECIE IN UNITÀ DI SPECIE INFERIORE O SUPERIORE.

234. *Le unità di una specie si riducono in unità di specie inferiore moltiplicandole pel numero che indica quante volte la specie superiore contiene l' inferiore. Viceversa: si riducono in unità di specie superiore dividendole pel medesimo numero.*

Così p. es. se 8 tese volessero ridursi in piedi, siccome una tesa equivale a 6 piedi, è chiaro che bisogna moltiplicare le 8 tese per 6 per ridurle in piedi, e vengono eguali a 48 piedi.

Viceversa: se p. es. 27 piedi si volessero ridurre in tese, bisogna dividere 27 per 6, perchè ogni tesa essendo 6 piedi, quante volte 27 contiene 6, tante tese vi sono in 27 piedi. Eseguendo la divisione, si avrà che 27 piedi sono eguali a 4 tese più 3 piedi di resto.

Passiamo ad altri esempi.

235. Sieno p. es. *54 canne*, *7 palmi*, *8 once*, e *3 minuti* che vogliansi ridurre in unità dell' infima specie, cioè in *minuti* (*).

(*) Per tenere sott' occhio le suddivisioni dell' unità principale, il

$$\overset{\textit{can.}}{54}\ \overset{\overset{8}{\textit{p.}}}{7}\ \overset{\overset{12}{\textit{o.}}}{8}\ \overset{\overset{5}{\textit{m.}}}{3}$$

proposto numero si scrive così: 54 7 8 3, ponendo sul numero che dinota le unità di ciascuna specie le lettere iniziali del nome di queste unità, e su queste lettere il numero che indica in quante unità della specie sottoposta si divide un' unità della specie superiore.

Cominceremo dal ridurre primieramente le 54 canne a palmi moltiplicandole per 8, perchè ogni canna si divide in 8 palmi: e però, intavolando l'operazione come si vede quì a fianco, si ottengono per prodotto 432 palmi, a' quali aggiungendo i 7 palmi del numero dato ne risulteranno 439 palmi. Poi questi palmi si ridurranno ad once moltiplicandoli per 12, perchè ogni palmo si divide in 12 once, e si avranno per prodotto 5268 once, alle quali aggiungendo le 8 del numero proposto si otterranno 5276 once. Infine queste once si ridurranno a minuti moltiplicandole per 5, perchè ogni oncia si divide in 5 minuti, ed al prodotto 26380 si aggiungeranno i 3 minuti; così il dato numero complesso ridotto a minuti, viene eguale a minuti 26380.

```
   54
    8
  ---
  432
    7
  ---
  439
   12
  ---
  878
 439
 ----
 5268
    8
 ----
 5276
    5
 ----
26380
    3
-----
26380
```

Volendo convertire una sola unità principale in unità dell' infima specie, si comincia dal ridurre una canna in palmi moltiplicando 1 per 8, e si avranno 8 palmi; poi gli 8 palmi si riducono in once moltiplicandoli per 12, e si avranno 96 once; e queste si convertono in minuti moltiplicandole per 5, e si avranno 480 minuti. È da notarsi che l' operazione si riduce a moltiplicare fra loro i numeri 8, 12, e 5, che, per aiuto della memoria, si scrivono sulle iniziali delle parole dinotanti le unità secondarie.

236. Sieno date p. e. 35746 linee, da cui vogliansi estrarre le unità delle specie superiori, cioè i pollici, i piedi, e le tese ove mai ne contenessero.

Si cominceranno ad estrarre dalle 35746 linee le unità delle specie prossima, cioè i pollici, dividendo 35746 per 12, perchè 12 linee fanno 1 pollice; e però, intavolando l' operazione come qui affianco ove i resti si sono scritti

```
35746 | 12 | 10
 2978 | 12 | 2
  248 |  6 | 2
   41 |    |
```

Digitized by Google

a dritta de' divisori, il quoziente 2978 che si ottiene dinoterà pollici, ed il resto 10 dinoterà linee. Poi dal numero 2978 dei pollici si estrarranno i piedi dividendolo per 12, perchè un piede è uguale a 12 pollici; quindi il quoziente 248 che ne risulta dinoterà piedi, ed il resto 2 dinoterà pollici. Infine dal numero 248 de' piedi si estrarranno le tese dividendolo per 6, perchè 6 piedi fanno una tesa; laonde il quoziente 41 che n' emerge dinoterà tese, ed il resto 2 dinoterà piedi: adunque le 35746 linee date sono eguali a $41^{tes.} 2^{pi.} 2^{po.} 10^{li.}$

Sieno per secondo esempio da ricavarsi le unità delle specie superiori da 43753 acini. Trascurando la divisione dell' oncia in dramme, ed eseguendo la divisione per 20 e per 30 come si fa per un numero semplice (n.° 62), secondo si vede qui affianco, si troverà che 43753 acini pareggiano $6^{lib.}\ 0^{o.}\ 27^{t.}\ 13^{a.}$

43753	20	13
2187	30	27
72	12	0
6		

RIDUZIONE DELLE UNITÀ SECONDARIE DI UN N.° COMPLESSO IN FRAZIONE ORDINARIA O DECIMALE DELL'UNITÀ PRINCIPALE.

237. *Si ridurranno le unità secondarie in unità dell' infima specie, e si avrà il numeratore; poi si riduce un' unità principale in unità dell' infima specie, e si avrà il denominatore.*

Sia p. es. il numero *8 libbre*, *5 once*, *7 dramme*, *2 trappesi*, *e 9 acini*, le cui unità secondarie, vogliansi ridurre a frazione ordinaria della *libbra*.

Ridurremo le unità secondarie, cioè le 5 *once*, le 7 *dramme*, e i 2 *trappesi* in *acini*, a cui aggiunti i 9 *acini* si avranno 3469 *acini* che formano il numeratore. Poi ridurremo un' unità principale, ossia una *libbra*, in *acini*, e si avrà il denominatore, il quale viene eguale a 7200; perciò il numero proposto viene eguale a *libbre* $8\frac{3469}{7200}$.

RIDUZIONE DI UNA FRAZIONE ORDINARIA DELL' UNITÀ PRINCIPALE IN NUMERO COMPLESSO.

238. *Si divide il numeratore pel denominatore riducendo le unità rappresentate dal numeratore in unità di specie inferiore; poi il resto si riduce in unità della specie inferiore seguente, e si divide per lo stesso denominatore; similmente si prosegue finchè si è giunto a dividere le unità dell' infima specie; i diversi quozienti ottenuti indicano le unità delle diverse specie del numero complesso equivalente alla frazione proposta.*

Sia la frazione $\frac{32}{47}$ di canna che voglia ridursi in numero complesso, cioè in *palmi*, *once*, e *minuti*. Siccome la data frazione equivale al quoziente che si ottiene dividendo 32 canne per 47, ridurremo le 32 canne in palmi moltiplicandole per 8, e fanno 256 palmi che dividiamo per 47, e si ottiene per quoziente 5 palmi, e restano 21 palmi a dividersi per 47; perciò ridurremo questi palmi in once moltiplicandoli per 12, e fanno 252 once che dividiamo per 47, e si ottengono per quoziente 5 once, e restano 17 once da dividersi per 47; queste 17 once si riducono in minuti moltiplicandole per 5, ed il prodotto 85 minuti si divide per 47, e danno per quoziente 1 minuto e $^{38}/_{47}$ di minuto. Perciò la frazione $^{32}/_{47}$ di canna equivale a $5^{p.}\ 5^{o.}\ 1^{m.}\ ^{38}/_{47}$.

32	47
8	$5^{p.}\ 5^{o.}\ 1^{m.}\ ^{38}/_{47}$
256	
21	
12	
252	
17	
5	
85	
38	

239. Se la proposta frazione fosse decimale, allora è più facile convertirla in numero complesso, perchè le divi-

sioni pel denominatore si fanno distaccando con la virgola tante cifre decimali quanti zeri esso contiene, come si vede nel seguente esempio.

Sia 0,57 di canna da ridursi in numero complesso. Ciò equivale a convertirvi la frazione ordinaria $^{57}/_{100}$: quindi operando come si è fatto nell' esempio precedente, viene eguale a $4^{p.}$ $6^{o.}$ $3^{m.}$, 6.

57
8
4,56
12
6,72
5
3,60

ADDIZIONE DEI NUMERI COMPLESSI.

240. *Si scrivono i numeri da addizionarsi l' uno sotto l' altro situando le unità della stessa specie in una medesima colonna; poi si comincia l' addizione dalle unità dell' infima specie; e se la somma contiene unità della specie superiore se ne ricavano queste unità per unirle alla colonna seguente, e le unità che restano si scrivono sotto la colonna addizionata.*

Sieno da addizionarsi $78^{can.}$ $7^{p.}$ $5^{o.}$ $3^{m.}$ con $26^{can.}$ $5^{p.}$ $10^{o.}$ $4^{m.}$ e con $9^{can.}$ $1^{p.}$ $11^{o.}$ $0^{m.}$

Scriviamo questi numeri come si vede qui affianco, e cominciamo dall'addizionare le unità dell' infima specie che sono i minuti, e daranno per somma 7 minuti i quali fanno 1 oncia e 2 minuti; perciò si scrivono i 2 minuti sotto la linea nella colonna de' minuti, e l'oncia si ritiene per unirla alla colonna delle once. Poi si passa a sommare i numeri della colonna delle once, a' quali si aggiunge l' oncia ritenuta, e si avranno 27 once; ma queste perchè fanno 2 palmi e 3 once, si scrivono le 3 once sotto la colonna delle once, ed i 2 palmi si ritengono per unirli alla colonna de' palmi. Indi si passa ad addizionare i numeri della colonna de' palmi, a' quali aggiungendo i 2 palmi di ritenuta si avranno per somma 15 palmi; ma perchè 15 palmi fanno una canna e 7 palmi, si scrivono i 7 palmi sot-

can.	p.	o.	m.
78	7	5	3
26	5	10	4
9	1	11	0
114	7	3	2

Digitized by Google

to la colonna de' palmi, e la canna si ritiene per unirla alla colonna delle canne. Infine si passa ad addizionare i numeri della colonna delle canne, a' quali si aggiunge la canna ritenuta, e si avranno per somma 114 canne; dunque la somma cercata sarà $114^{can.}\ 7^{p.}\ 3^{o.}\ 2^{m.}$

Similmente si opererebbe sopra qualunque altro esempio.

241. Se dovessero addizionarsi i numeri scritti qui affianco, che sono *ore*, *minuti primi*, e *minuti secondi*, distinti dai segni posti su i medesimi, cioè da un *o* sulle ore, da un *apice* su i primi e da due *apici* su i secondi. Dopo addizionate le unità dei secondi che fanno 21, si scrive 1 sotto la colonna delle unità, e le 2 decine si uniscono alla colonna delle decine, e si hanno così 15 decine di secondi; ma siccome ogni 6 decine di secondi fanno 1 primo, si estraggono i primi dividendo 15 per 6, e si ottengono 2 primi, e 3 decine di secondi che si scrivono al di sotto. Poi si passa ad addizionare la colonna de' primi, a cui si uniscono i due primi ottenuti, e si procederà con la stessa regola praticata per i secondi, cioè si dividerà la somma delle decine de' primi per 6 per ricavarne le ore. Infine si addizioneranno le ore che si troveranno essere 51, dalle quali si estrarranno i giorni dividendole per 24, e la somma totale si troverà essere $29^{g.}\ 3^{o.}\ 16'\ 31''$.

	21^{o}	$34'$	$46''$
	14	26	58
	15	14	47
$29^{g.}$	$3^{o.}$	$16'$	$31''$

La PROVA delle quattro operazioni su i numeri denominati riposando su gli stessi principii che quella su i numeri interi, potrà eseguirsi della maniera medesima che si operò su questi numeri.

SOTTRAZIONE DEI NUMERI COMPLESSI.

242. *Si scrive il numero minore sotto il maggiore situando le unità della stessa specie in una medesima colonna; poi si comincia la sottrazione dalle unità dell' infima specie, e se non può eseguirsi, il numero che sta sopra si fa imprestare un' unità della specie superiore, riducendola in ordine inferiore; e nel continuare l' operazione, il numero che ha imprestato l' unità si considera con un' unità di meno.*

Sia il numero 15$^{lib.}$ 8$^{o.}$ 21$^{t.}$ 5$^{a.}$ che deve togliersi dall' altro 29$^{lib.}$ 7$^{o.}$ 0$^{t.}$ 16$^{a.}$

Scriviamo i numeri come si vede qui affianco, e cominciamo dal togliere le unità dell' infima specie, cioè i 5 acini da 16 acini, ed il resto si scrive sotto la colonna degli acini. Poi passiamo a togliere i 21 trappesi da *zero* trappesi, ma non potendosi, ci faremo imprestare un' oncia dalle 7 once, la quale ridotta in trappesi fa 30 trappesi; perciò toglieremo i 21 trappesi da 30 trappesi, ed il resto 9 si scrive sotto la colonna dei trappesi. Indi si passa a togliere le 8 once dalle 6 once che vi sono rimaste, e quindi le 6 once si fanno imprestare una libbra dalle 29 libbre, la quale ridotta in once, ed aggiunta alle 6 once, fa 18 once; perciò toglieremo 8 once da 18 once, e si avranno per resto 10 once, che scrivonsi al di sotto. Infine si toglieranno le 15 libbre da 28 libbre, perchè le libbre sono rimaste 28, e si avranno per resto 13 libbre. Dunque il resto cercato sarà 13$^{lib.}$ 10$^{o.}$ 9$^{t.}$ 11$^{a.}$

lib.	o.	t.	a.
29	7	0	16
15	8	21	5
13	20	9	11

Similmente si opererebbe su qualunque altro esempio.

243. Se da 22^{ore} 5′ 36″ si dovessero togliere 18^{ore} 23′ 56″; intavolando l' operazione come si vede qui affianco, si dirà: da 16 tolto 7 resta 9 che si scrive al di sotto; ma poi per togliere le 5 decine di secondi dalle due decine che vi sono rimaste, le 2 decine si faranno imprestare un primo dai 5 primi, e perchè un primo fa 6 decine di secondi, le decine di secondi divengono 8, e si dirà: da 8 tolto 5 resta 3 che si scrive al di sotto. Poi da' primi, che sono rimasti 4, si tolgono i 3 primi e resta 1 che si scrive al di sotto. Indi dalle decine de' primi che divengono 6, perchè si fanno imprestare 1 ora che fa 6 decine di primi, si tolgono le 2 decine de' primi, e restano 4. Infine dalle ore che sono rimaste 21, si tolgono le 18 ore, e restano 3 ore. Perciò il resto sarà 3° 41′ 39″.

22°	05′	36″
18	23	57
3°	41′	39″

MOLTIPLICAZIONE DI UN NUMERO COMPLESSO PER UN INTERO.

244. *Si moltiplicano le unità delle diverse specie del moltiplicando per l' intero, cominciando dall' infima specie, e da ciascun prodotto parziale si ricavano le unità delle specie superiori che si aggiungono al prodotto seguente ; i resti dinotano le unità secondarie , e l' ultimo quoziente unito all' ultimo prodotto parziale dinota le unità principali del prodotto cercato.*

Sieno $57^{tes.}$ $5^{pi.}$ $8^{po.}$ $9^{l.}$ da moltiplicarsi per 43.

Si moltiplicheranno separatamente le linee, i pollici, i piedi, e le tese per 43, come si vede qui di contro; e perchè il prodotto delle 9 linee per 43, che è 387 linee, contiene pollici, se n' estrarranno i pollici dividendo le 387 linee per 12 ; il quoziente 32 che si ottiene dinoterà pollici, ed il resto 3 dinoterà linee. Poi si passa a moltiplicare gli 8 pollici per 43 , ed al prodotto 344 si aggiungono i 32 pollici ricavati dal prodotto precedente, e si avranno così 376 pollici, i quali contenendo piedi, se n' estrarranno i piedi dividendoli per 12, il quoziente 31 dinoterà piedi, ed il resto 4 dinoterà pollici. Indi si passa a moltiplicare i 5 piedi per 43 ed al prodotto 215 si aggiungono i 31 piedi ricavati dal prodotto precedente , e si avranno 246 piedi, i quali contenendo tese, se n'estrarranno le tese dividendoli per 6; il quoziente 41 dinoterà tese, e vi restano zero piedi. Infine si passa a moltiplicare le 57 tese per 43, ed al prodotto si aggiungono le 41 tese ricavate dal prodotto precedente , e si avranno per somma 2492 tese ; laonde il prodotto cercato sarà $2492^{te.}$ $0^{pi.}$ $4^{po.}$ $3^{li.}$

$57^{te.}$ $5^{pi.}$ $8^{p.}$ $9^{l.}$		
43		
387	12	3
32		
344		
376	12	4
31		
215		
246	6	0
41		
171		
228		
2492		

REGOLA GENERALE PER LA MOLTIPLICAZIONE DEI NUMERI COMPLESSI.

245. *Si riduce ciascuno dei numeri dati in numero incomplesso, e poi si esegue la moltiplicazione ; e siccome il prodotto deve essere della stessa natura del moltiplicando , se la sua parte fratta si volesse ridurre in numero complesso, si ridurrà in numero complesso della detta natura : e se si volesse espressa in decimali, si ridurrà in decimale.*

Sia p. es. a moltiplicarsi $9^{lire}\ 5^{s.}\ 8^{d.}$ per $7^{tese}\ 4^{p.}\ 5^{p.}\ 2^{li.}$ Riducendo i numeri dati in numeri incomplessi, dovremo moltiplicare $9\frac{47}{60}$ per $7\frac{119}{439}$.

Se non si richiedesse molta approssimazione, come ordinariamente avviene, si potrebbero per brevità convertire le frazioni ordinarie in 100^{mi}, ed allora si riduce a moltiplicare 9,75 per 7,73, e si ha per prodotto 75,37 con l' errore di pochi centesimi. Infine se il prodotto si volesse ridurre in numero complesso viene eguale a $75^{lire}\ 7^{s.}\ 4^{d.}$, 8.

246. Si suole anche fare la moltiplicazione riducendo le unità secondarie del moltiplicando all' infima specie , e poi si moltiplicano tanto queste unità dell' infima specie quanto le unità principali pel moltiplicatore che è un numero astratto, e si ottengono due prodotti parziali uno che dinota unità dell' infima specie e l' altro che dinota unità principali; poi dalle unità dell' infima specie si ricavano quelle delle specie superiori, e le unità principali che ne risultano si uniscono alle altre del prodotto, e si avranno così tutte le unità principali e le secondarie del prodotto cercato.

DIVISIONE DI UN NUMERO COMPLESSO PER UN INTERO.

247. *Si dividono le unità delle diverse specie del dividendo per l' intero, cominciando dalle unità principali ; e quando le unità che si dividono fanno un numero minore del divi-*

sore si riducono in unità di specie inferiore a cui si aggiungono anche le unità di detta specie inferiore che si trovano nel dividendo; e poi si esegue la divisione.

248. Sieno da dividersi 77^{libbre} 9$^{o.}$ 13$^{t.}$ 11$^{a.}$ per 24.

Si comincerà dal dividere 77 libbre per 24 come si vede qui di contro, e si avranno, per quoziente 3 libbre; ma restano 5 libbre da dividersi per 24, le quali si ridurranno ad once moltiplicandole per 12, ed al prodotto si aggiungeranno le 9 once, e si otterranno 69 once che si divideranno per 24 e si ottiene

lib.	o.	t.	a.	
77	9	13	15	24
5		643		lib. o. p. a.
12		163		3 2 26 16 $^{11}/_{24}$
69		19		
21		20		
30		380		
630		15		
13		395		
643		155		
		11		

per quoziente 2 once; e siccome restano 21 once da dividersi per 24, esse si riducono in trappesi moltiplicandole per 30, e si otterranno 630 trappesi, a' quali aggiungendo i 13 trappesi si avranno 643 trappesi che si divideranno per 24, e si avranno per quoziente 26 trappesi; ma restano 19 trappesi da dividersi per 24, i quali si convertiranno in acini moltiplicandoli per 20, e ne risulteranno 380 acini a cui aggiungendo i 15 acini, si avranno 395 acini, che divisi per 24, danno per quoziente 16$^{ac.}$ $^{11}/_{24}$. Perciò il quoziente cercato sarà 3$^{lib.}$ 2$^{o.}$ 26$^{t.}$ 16$^{a.}$ $^{11}/_{24}$.

REGOLA GENERALE PER LA DIVISIONE DEI NUMERI COMPLESSI.

249. *Si riduce ciascuno dei numeri dati in numero incomplesso, e poi si esegue la divisione.*

Il quoziente che si ottiene sarà un numero astratto, se si ha per fine di trovare quanto è il dividendo rispetto al divi-

sore, e ciò avviene allorchè il dividendo ed il divisore sono numeri complessi della stessa natura. Se poi si ha per fine di trovare un numero che moltiplicato pel divisore considerato come astratto produca il dividendo, il quoziente sarà un numero complesso della stessa natura del dividendo.

Sieno $30^{lire}\ 4^{s.}\ 8^{d.}$ da dividersi per $24^{tese}\ 5^{s.}\ 3^{po.}\ 7^{li.}$ (*)

Convertiamo i numeri dati in numeri incomplessi, e lasciamo decomposti i denominatori in fattori, affinchè sieno visibili i fattori comuni per sopprimerli prima di moltiplicare il dividendo pel divisore capovolto. Così l' operazione si riduce a dividere $\frac{7236}{20.12}$ per $\frac{21499}{6.22.12}$ e supprimendo i fattori 12 e 4 comuni ai denominatori, il quoziente sarà $\frac{7236\times6.3}{5\times21499}=\frac{130608}{107495}=1\,\frac{23113}{107495}$. Questo quoziente si farebbe rimanere così se dovesse essere numero astratto, ma se deve essere complesso, si riduce a complesso della stessa natura del dividendo, e viene eguale a $1^{lir.}\ 4^{s.}\ 3^{d.}\ \frac{64875}{107495}$.

250. *Avvertimento.* Facciamo osservare che quando si fa uso delle proporzioni per risolvere i problemi, invece di adoperare i metodi esposti per la moltiplicazione e divisione dei numeri complessi, sogliono ridursi questi numeri in unità dell' infima specie come vedremo in seguito, e poi si eseguono le operazioni su i numeri che ne risultano considerati come interi; ed allora l' incognita rappresenta l' unità dell' infima specie della natura che la questione esige, perciò da queste unità si ricaveranno infine quelle delle specie superiori.

(*) Quest' esempio potrebbe corrispondere alla seguente quistione. Trovare il prezzo di una *tesa* di mercanzia, conoscendosi che $24^{tese}\ 5^{pi.}\ 3^{po.}\ 2^{li.}$ si sono pagate $30^{lire}\ 4^{s.}\ 8^{d.}$?

CAP. X.

Ragioni e proporzioni.

251. Due numeri possono paragonarsi fra loro per due diversi fini, cioè, o per vedere di quanto uno differisce dall'altro, o per vedere come uno si compone per mezzo dell'altro.

Allorchè due numeri si paragonano fra loro per vedere di quanto uno differisce dall' altro, il risultato di questo paragone viene espresso dalla loro differenza, e si chiama *ragione* o *rapporto aritmetico* fra i due numeri.

Allorchè due numeri si paragonano fra loro per vedere come uno si compone per mezzo dell' altro, il risultato di questo paragone viene espresso dal quoziente di uno diviso per l' altro, e si chiama *ragione* o *rapporto geometrico* fra i due numeri, ed anche più semplicemente *ragione* o *rapporto*.

Dunque con più brevità possiamo dire che:

La *ragione aritmetica* fra due numeri è la loro differenza. Così p. e. la ragione aritmetica di 9 a 4 è $9-4$, ossia 5.

La *ragione geometrica* fra due numeri è il quoziente di uno diviso per l'altro. Così p. e. la ragione geometrica di 6 a 2 è $6:2$, ossia 3.

Tanto nella ragione aritmetica quanto nella geometrica i due numeri che si paragonano si chiamano *termini* della ragione, ed in particolare quello che si scrive prima si chiama *antecedente*, e quello che si scrive dopo si chiama *conseguente*. Così p. es. nella ragione aritmetica di 9 a 4, l' antecedente è 9, ed il conseguente è 4; e nella ragione geometrica di 6 a 2, l' antecedente è 6, ed il conseguente è 2.

252. L' eguaglianza di due ragioni aritmetiche si chiama *proporzione aritmetica* ovvero *equidifferenza*. Così p. es. la ragione aritmetica di 11 a 9 essendo uguale a quella di 7 a 5, per essere $11-9=7-5$, queste due ragioni uguali co-

stituiscono una proporzione aritmetica, ed i quattro numeri 11, 9, 7, 5 diconsi essere in *proporzione aritmetica* ovvero *aritmeticamente proporzionali*. Dunque quattro numeri sono aritmeticamente proporzionali, allorchè la differenza fra il primo ed il secondo è uguale a quella fra il terzo e il quarto.

Per indicare che i quattro numeri 11, 9, 7, 5 sono in proporzione aritmetica, si scrivono nel seguente modo 11.9:7.5; e si leggono *11 sta a 9 come 7 sta a 5.*

253. L' eguaglianza di due ragioni geometriche si chiama *proporzione geometrica*, o semplicemente *proporzione.*

Così p. es. la ragione di 6 a 2 essendo uguale a quella di 12 a 4, perchè 6 diviso per 2 è uguale a 12 diviso per 4, queste due ragioni uguali costituiscono una proporzione, ed i quattro numeri 6, 2, 12, 4 diconsi essere *in proporzione*, o *proporzionali.*

Dunque quattro numeri sono in *proporzione*, allorchè il primo diviso pel secondo pareggia il terzo diviso pel quarto.

Per indicare che i quattro numeri 5, 2, 12, e 4 sono in proporzione, si scrivono nel seguente modo 6:2::12:4, ovvero 6 : 2=12 : 4, e leggonsi *6 sta 2 come 12 sta a 4.*

254. Il primo ed il quarto termine di una proporzione, sia aritmetica, sia geometrica, si chiamano *termini estremi*; ed il secondo e terzo si chiamano *termini medii*; l' ultimo poi si chiama *quarto proporzionale.*

255. Allorchè i termini medii di una proporzione aritmetica o geometrica sono uguali, la proporzione si dice *continua* (*); e perchè in tal caso i termini diversi riduconsi a tre, quello di mezzo si chiama *medio* proporzionale, e l' ulmo si chiama *terzo* proporzionale.

Così p. e. la proporzione aritmetica 9.7:7.5è continua; e la proporzione geometrica 8:4::4:2 è pure continua.

(*) Usavasi chiamar *discreta* o *discontinua* quella con i termini medii diseguali.

Per indicare poi che i tre numeri 9, 7, 5 sono in proporzione aritmetica continua, si scrivono nel seguente modo ÷ 9 . 7 . 5, leggendosi *9 sta a 7 come 7 sta a 5.*

E per indicare che i tre numeri 8, 4, 2 sono in proporzione geometrica continua si scrivono ∺8 : 4 : 2, leggendosi *8 sta a 4 come 4 sta a 2.*

256. Siccome una qualsiasi quantità, che dinotiamo con a, è uguale ad $\frac{a}{1}$, cioè rappresenta il rapporto che essa serba all'unità; viceversa il rapporto dell'unità ad a è $\frac{1}{a}$; perciò la ragione di $1 : a$ si dice *inversa* o *reciproca* di quella di $a : 1$. Così p. e. la ragione di 5 : 3 è *inversa* di quella di 3 : 5, perchè la prima ragione è $\frac{5}{3}$, e la seconda è $1 : \frac{5}{3}$, ossia $\frac{3}{5}$.

Dunque la ragione del conseguente all' antecedente è inversa di quella dell' antecedente al conseguente.

Similmente due numeri diconsi *reciproci* o *inversi* l' uno dall' altro, quando il primo essendo a, l' altro è $\frac{1}{a}$. È chiaro poi che il prodotto di questi numeri è uguale all' unità.

257. Quella ragione che risulta dal moltiplicare fra loro più ragioni geometriche, si dice *composta* da queste. Or poichè moltiplicando più ragioni, la ragione che ne nasce ha per antecedente il prodotto degli antecedenti, e per conseguente il prodotto de' conseguenti, ne segue che la ragione composta da altre ragioni avrà per antecedente il prodotto degli antecedenti, e per conseguente il prodotto de' conseguenti. Così p. es. avendosi le ragioni di 5 : 2, di 3 : 8, e di 4 : 7, la loro composta sarà quella di $5 \times 3 \times 4 : 2 \times 8 \times 7$, ossia di 60 : 112.

La ragione composta da due ragioni, una inversa dell'altra, ha l'antecedente uguale al conseguente; perchè il prodotto delle ragioni componenti dovendo eguagliare l' unità, ciò non potrebbe avvenire se l'antecedente non fosse eguale al conseguente.

Per indicare che una ragione è composta da più altre, si mettono in

parentesi tutte le ragioni componenti, affin di risvegliare l' idea che dal loro prodotto ne nasce la composta. Così la ragione di 60 : 112 essendo composta dalle ragioni di 5 : 2, di 3 : 8, e di 4 : 7, si scriverà 60 : 112 : : (5 : 2)(3 : 8)(4 : 7), e si leggerà *60 sta a 112 in ragion composta di 5 a 2, di 3 ad 8, e di 4 a 7.*

PROPRIETÀ DELLA RAGIONE E DELLA PROPORZIONE ARITMETICA

258. *La ragione aritmetica fra due numeri non cambia, se ad essi si aggiunge o toglie il medesimo numero.*

Dim. Difatti, la ragione aritmetica fra due numeri essendo la loro differenza, sappiamo che la differenza fra due numeri non cambia, tanto se si aggiunge quanto se si toglie ad essi la medesima quantità.

Così p. es. la ragione aritmetica di 7 a 5 essendo 2, aggiungendo 4 tanto a 7 quanto a 5, ne vengono i numeri 11 e 9, e la ragione aritmetica fra questi numeri è anche 2.

259. *Nella proporzione aritmetica la somma dei termini estremi pareggia quella de' termini medii.*

Sia la proporzione aritmetica 8 . 5 : 7 . 4; dico che si avrà $8+4=5+7$.

Dim. I quattro numeri 8, 5, 7, 4 essendo in proporzione aritmetica, dovrà essere $8-5=7-4$; ed aggiungendo all' una ed all' altra di queste grandezze uguali il secondo e quarto termine, ne verrà $8-5+5+4=7-4+5+4$; ma poichè $5-5=0$, e $4-4=0$, ne risulterà $8+4=5+7$; e quindi la somma de' termini estremi è uguale a quella dei termini medii.

Se gli antecedenti fossero minori de' conseguenti, come avviene nella proporzione 6 . 10 : 5 . 9, allora, poichè $10-6=9-5$, aggiungendo a queste due grandezze uguali il primo e terzo termine, ne verrà $10-6+6+5=9-5+6+5$, che si riduce a $10+5=9+6$; laonde la somma de' termini estremi pareggia quella de' termini medii.

È chiaro poi che quando la proporzione è continua *la somma degli estremi viene uguale al doppio del termine medio.* Così p. es. nella proporzione aritmetica continua 7 . 5 : 5 . 3, si avrà $7+3=5+5=10$.

260. *Se quattro numeri sono tali, che la somma degli estremi pareggia quella de' medii, i quattro numeri saranno in proporzione aritmetica.*

Sieno p. es. i quattro numeri 11, 8, 5, 2, tali che si abbia $11+2=8+5$: dico che starà 11 . 8 : 5 . 2.

Dim. Difatti, essendo per ipotesi $11+2=8+5$, togliendo da queste due grandezze uguali il secondo e quarto dei numeri dati, ne verrà $11+2-8-2=8+5-8-2$, ossia $11-8=5-2$; e quindi 11 . 8 : 5 . 2.

Quando poi tre numeri sono tali che la somma de' termini estremi pareggia il doppio del termine medio, essi formano una proporzione aritmetica continua.

Così p. es. avendosi tre numeri 10, 7, 4 tali che $10+4=7+7$, questi tre numeri saranno in proporzione aritmetica continua, cioè si avrà ÷ 10 . 7 . 4.

261. Il teorema enunciato nel numero precedente può anche enunciarsi indipendentemente dall' ordine come sono disposti i quattro numeri, dicendosi: ***Se la somma di due numeri pareggia quella di due altri numeri, i quattro numeri costituiscono una proporzione aritmetica, potendosi prendere indifferentemente i due primi per termini estremi, ed i due secondi per termini medii.*** **In tal guisa potranno farsi otto combinazioni differenti, e si avranno otto proporzioni aritmetiche. Così, per esempio, avendosi $5+3=6+2$; prendendo 5 e 3 per termini estremi si avranno la quattro proporzioni**

5 . 6 : 2 . 3, 3 . 6 : 2 . 5,
5 . 2 : 6 . 3, 3 . 2 : 6 . 5;

e prendendo 5 e 3 per termini medii, si avranno le quattro proporzioni

6 . 5 : 3 . 2, 2 . 5 : 3 . 6,
6 . 3 : 5 . 2, 2 . 3 : 5 . 6.

L' esistenza di queste otto proporzioni si dimostra sempre con to-

Digitized by Google

gliere dalle due grandezze che si sono supposte eguali, quei termini che si pongono al secondo e quarto posto.

262. *Il termine incognito di una proporzione aritmetica quando è estremo si trova sommando i medii, e togliendo dalla somma l' altro estremo ; e quando è medio si trova sommando gli estremi , e togliendo dalla somma l' altro medio.*

Sia p. es. la proporzione aritmetica $8 . 5 : 7 : x$, ove è incognito un termine estremo, che abbiamo indicato con x, si avrà $x=5+7-8=4$.

Dim. In effetti, i numeri 8,5, 7, x essendo in proporzione aritmetica, la somma de' termini estremi è eguale a quella de'medii, quindi si ha $x+8=5+7$; e togliendo dall'una e dall' altra di queste grandezze uguali l' estremo cognito, che è 8, ne verrà $x+8-8=5+7-8$, ossia $x=5+7-8=4$. Dunque il termine estremo x si ottiene sommando i medii 5 e 7 , e togliendo dalla somma 12 l' altro estremo 8.

Se poi il termine incognito fosse uno de' medii, come avviene nella proporzione $6 . x : 3 . 7$, si avrà similmente $x+3 =6+7$; e togliendo dall'una e dall'altra di queste grandezze uguali l' altro medio 3, ne verrà $x+3-3=6+7-3$, ossia $x=6+7-3=10$.

Nella proporzione aritmetica continua , la somma degli estremi essendo uguale al doppio del termine medio , *un termine estremo si trova raddoppiando il medio e togliendone l' altro estremo; ed il medio si ottiene sommando gli estremi , e prendendo la metà della somma.*

Proprietà della ragione e della proporzione geometrica.

263. *Una ragione non si altera se si moltiplicano e si dividono i suoi termini per lo stesso numero.*

Perchè la ragione essendo eguale al quoziente che si ottiene col dividere l' antecedente pel conseguente, sappiamo

Digitized by Google

che il quoziente non cambia se si moltiplicano o dividono il dividendo ed il divisore per lo stesso numero.

264. *In ogni proporzione il prodotto de' termini estremi pareggia quello de' termini medii.*

Sia p. e. la proporzione $5:3::10:6$. Si avrà $5\times6=3\times10$.

Dim. In effetti, i quattro numeri 5, 3, 10, e 6 essendo in proporzione, vuol dire che il primo diviso pel secondo è uguale al terzo diviso pel quarto: quindi si ha $\frac{5}{3}=\frac{10}{6}$; e moltiplicando queste frazioni eguali pel prodotto del secondo e quarto termine della proporzione, ne viene $\frac{5\times3\times6}{3}=\frac{10\times3\times6}{6}$; e sopprimendo il fattore 3 comune a' due termini della prima frazione, ed il fattore 6 comune ai due della seconda, ne risulta $5\times6=10\times3$; onde si vede che il prodotto de' termini estremi pareggia quello dei termini medii.

Nella proporzione continua il prodotto de' termini estremi essendo uguale al termine medio moltiplicato per sè stesso, ed il prodotto di un numero per sè stesso chiamandosi *quadrato* di esso numero, ne segue che *il prodotto dei termini estremi pareggia il quadrato del termine medio.*

265. *Se quattro numeri sono tali che il prodotto degli estremi pareggia quello dei medii, essi sono in proporzione.*

Sieno p. es. i quattro numeri 10, 8, 5, 4, tali che abbiasi $10\times4=8\times5$; dico che sono in proporzione, cioè si ha

$$10:8::5:4.$$

Dim. Essendo per ipotesi $10\times4=8\times5$, dividendo queste due grandezze uguali pel prodotto del secondo e quarto dei numeri dati, si avrà $\frac{10\times4}{8\times4}=\frac{8\times5}{8\times4}$; e sopprimendo i fattori 4 ed 8 che sono rispettivamente comuni a' termini del-

la prima e della seconda frazione, ne verrà $\frac{10}{8}=\frac{5}{4}$; e però $10:8::5:4$.

Quando poi tre numeri sono tali che il prodotto de' termini estremi pareggia il quadrato dal termine medio, i tre numeri formano una proporzione continua. Così p. es. i tre numeri 8, 4, 2, essendo tali che $8\times2=4\times4$, essi sono in proporzione continua, cioè si ha $\div 8:4:2$.

266. Qui pure come nel n.° 261 possiamo enunciare il precedente teorema nel seguente modo: *Se il prodotto di due numeri pareggia quello di due altri numeri, i quattro numeri formano una proporzione; potendosi prendere indifferentemente i due fattori di un prodotto come termini estremi, ed i due fattori dell' altro come termini medii.*

Così p. es. essendo $10\times4=8\times5$, prendendo 10 e 4 per termini estremi, si avranno le quattro proporzioni

$$10:8::5:4, \qquad 4:8::5:10,$$
$$10:5::8:4, \qquad 4:5::8:10;$$

e prendendo 10 e 4 per termini medii, si avranno le quattro proporzioni

$$8:10::4:5, \qquad 5:10::4:8,$$
$$8:4::10:5, \qquad 5:4::10:8.$$

L' esistenza di queste otto proporzioni si dimostra sempre con dividere le due grandezze che si sono supposte uguali, pel prodotto di quei termini che si pongono al secondo e quarto posto.

267. *Il termine incognito di una proporzione quando è estremo si trova moltiplicando i medii, e dividendo il prodotto per l' altro estremo; e quando è medio si trova moltiplicando gli estremi, e dividendo il prodotto per l' altro medio.*

Sia p. es. la proporzione $10:8::5:x$, nella quale è incognito il quarto termine che abbiamo indicato con x, si avrà

$$x=\frac{8\times4}{10}=\frac{40}{10}=4.$$

Dim. In effetti, i quattro numeri 10, 8, 6, x essendo in proporzione, il prodotto de' termini estremi è uguale a quello de' termini medii, quindi si avrà $x\times10=8\times5$; e di-

videndo l'una e l'altra di queste grandezze uguali per l'estremo cognito, che è 10, ne verrà $x = \frac{8 \times 5}{10}$.

Perciò l'estremo x si ottiene facendo il prodotto de' medii, e dividendolo per l'altro estremo.

Se poi il termine incognito fosse uno de' medii, come avviene nella proporzione $10 : x :: 5 : 4$, allora, essendo $x \times 5 = 10 \times 4$, dividendo queste due grandezze uguali per l'altro medio, ne verrà $x = \frac{10 \times 4}{5}$; cioè, il medio x è uguale al prodotto degli estremi diviso per l'altro medio 8.

Nella proporzione continua il prodotto de' termini estremi essendo uguale al quadrato del termine medio, *un termine estremo si trova facendo il quadrato del medio e dividendolo per l'altro estremo; ed il termine medio si trova facendo il prodotto degli estremi, e prendendone la radice quadrata.*

Vedremo in appresso come trovare la radice quadrata di un dato numero.

268. *Se in più proporzioni si moltiplicano i termini della prima per i corrispondenti delle altre, i prodotti saranno in proporzione*

Sieno le proporzioni $8 : 3 :: 24 : 9$,
e $5 : 2 :: 10 : 4$;
dico che moltiplicandole termine a termine ossia *per ordine*, si avrà $8 \times 5 : 3 \times 2 :: 24 \times 10 : 9 \times 4$.

In effetti, scrivendo le proporzioni sotto forma di frazioni eguali, verrà $\frac{8}{3} = \frac{24}{9}$ e $\frac{5}{2} = \frac{10}{4}$; e moltiplicando per ordine le prime frazioni per le seconde, ne verranno le frazioni eguali $\frac{8 \times 5}{3 \times 2} = \frac{24 \times 10}{8 \times 4}$;
perciò si avrà $8 \times 5 : 3 \times 2 :: 24 \times 10 : 9 \times 4$.

La stessa dimostrazione si può estendere ad un numero qualunque di proporzioni.

269. *Se in due proporzioni si dividono i termini della prima per i corrispondenti della seconda, i quozienti saranno in proporzione.*

Sieno le due proporzioni $8:3::24:9$
$5:2::10:4;$

dico che dividendole termine a termine, si avrà $\frac{8}{5}:\frac{3}{2}::\frac{24}{10}:\frac{9}{4}$.

In effetti, scrivendole sotto forma di frazioni eguali, e dopo dividendo per ordine queste frazioni,

si avrà $\frac{8\times2}{3\times5}=\frac{24\times4}{9\times10}$; ossia $\frac{8}{5}:\frac{3}{2}=\frac{24}{10}:\frac{9}{4}$; e ciò appunto si voleva dimostrare.

270. I termini di una proporzione sogliono cambiarsi di posto, ed anche combinarsi fra loro per via di somma, di sottrazione, di moltiplicazione, o di divisione in modo da risultarne una nuova proporzione. A quattro di questi cambiamenti o combinazioni che più spesso occorrono, si danno i seguenti nomi.

Si dice *invertendo* quando in una proporzione i conseguenti si fanno passare nel posto de' rispettivi antecedenti, e questi in quello de' rispettivi conseguenti.

Si dice *permutando* allorchè l'antecedente della prima ragione si paragona a quello della seconda, ed il conseguente della prima a quello della seconda.

Si dice *componendo* allorchè la somma dell' antecedente e conseguente di ciascun rapporto si paragona al medesimo conseguente, o al medesimo antecedente.

Dicesi *dividendo* quando la differenza fra l' antecedente e il conseguente di ciascun rapporto si paragona al rispettivo conseguente, o al rispettivo antecedente (*).

N. B. In questo capitolo riguardiamo i termini di una proporzione come numeri astratti, e perciò è sempre permesso di sommare, sot-

(*) Le diverse maniere di combinare i termini di una proporzione dagli antichi dicevansi: *modi di argomentare in proporzione.*

Digitized by Google

trarre, e paragonarli fra loro; ma se le quantità da' medesimi rappresentate dovessero riguardarsi come concrete, non sarebbe permesso fare quei cambiamenti dove avviene somma, sottrazione, o paragone di quantità eterogenee; potendo questi cambiamenti farsi solamente allorchè le quantità sono omogenee.

271. *Se quattro numeri sono in proporzione*, invertendo o permutando *saranno ancora in proporzione.*

Sia p. es. la proporzione $14 : 8 :: 7 : 4$; dico che invertendo si avrà $8 : 14 :: 4 : 7$; e permutando si avrà $14 : 7 :: 8 : 4$.

Dim. Difatti, affinchè sia $8 : 14 :: 4 : 7$, e $14 : 7 :: 8 : 4$, dovrebbe essere $8 \times 7 = 14 \times 4$; ma ciò è vero, perchè essendo per ipotesi $14 : 8 :: 7 : 4$, il prodotto 14×4 degli estremi è uguale al prodotto 8×7 de' medii, dunque è anche vero che se quattro numeri sono in proporzione, invertendo o permutando saranno pure in proporzione.

272. *Se quattro numeri sono in proporzione*, componendo o dividendo *saranno pure in proporzione.*

Sia la proporzione $15 : 6 :: 5 : 2$.

Dico che componendo o dividendo si avrà

$$15+6 : 6 :: 5+2 : 2, \quad \text{e} \quad 15-6 : 6 :: 5-2 : 2.$$

Dim. In effetti, per essere i quattro numeri 15, 6, 5, 2 in proporzione, si ha $\frac{15}{6} = \frac{5}{2}$; ed aggiungendo al primo ed al secondo membro l' unità, scrivendola nel primo sotto forma frazionaria che abbia per denominatore 6, e nel secondo sotto forma frazionaria che abbia per denominatore 2, verrà $\frac{15}{6} + \frac{6}{6} = \frac{5}{2} + \frac{2}{2}$; ossia $\frac{15+6}{6} = \frac{5+2}{2}$; cioè $15+6 : 6 :: 5+2 : 2$.

Togliendo poi dai due membri l'unità, verrà

$$\frac{15}{6} - \frac{6}{6} = \frac{5}{2} - \frac{2}{2}, \text{ ovvero } \frac{15-6}{6} = \frac{5-2}{2},$$

cioè $15-6 : 6 :: 5-2 : 2$.

Se poi la proporzione avesse gli antecedenti minori dei

Digitized by Google

rispettivi conseguenti, come avviene nella proporzione 3 : 8 : : 9 : 24, allora si opererà al contrario, cioè le due frazioni uguali si toglieranno dall' unità, e si avrà

$$\frac{8}{8}-\frac{3}{8}=\frac{24}{24}-\frac{9}{24}, \text{ ovvero } \frac{8-3}{8}=\frac{24-9}{24};$$

e quindi $8-3 : 8 :: 24-9 : 24.$

Quando poi si volesse paragonare la somma o la differenza fra l' antecedente e conseguente al medesimo antecedente, s' invertirà la proporzione, e si procederà similmente.

273. ***Se in una proporzione si moltiplicano o si dividono gli antecedenti o i conseguenti per lo stesso numero, ne risulta una nuova proporzione.***

Perchè ciò equivale a moltiplicare o a dividere per lo stesso numero le due frazioni uguali, che esprimono i due rapporti della proporzione.

274. ***In una proporzione la somma o differenza degli antecedenti sta alla somma o differenza de' conseguenti, come un antecedente sta al suo conseguente.***

Sia p. es. la proporzione 12 : 3 : : 8 : 2. Dico che si avrà

$$12+8 : 3+2 :: 12 : 3, \text{ e } 12-8 : 3-2 :: 12 : 3.$$

Dim. **Difatti, nel primo caso, essendo 12 : 3 : : 8 : 2, permutando ne verrà 12 : 8 : : 3 : 2; e componendo si avrà 12+8 : 8 : : 3+2 : 2 ; e di nuovo permutando, ne verrà 12+8 : 3+2 : : 8 : 2. Nel secondo caso si opera similmente, ma solo invece del componendo si farà il dividendo.**

275. ***In una serie di rapporti uguali, la somma degli antecedenti sta a quella de' conseguenti come un antecedente sta al suo conseguente.***

Sieno p. es. i tre rapporti uguali 12 : 3, 8 : 2, 20 : 5.

Dico che si avrà 12+ +8 20 : 3+2+5 : : 12 : 3.

Dim. **In effetti, essendo 12 : 3 : : 8 : 2, pel teorema precedente si avrà 12+8 : 3+2 : : 8 : 2, e sostituendo alla ragione di 8 : 2 quella di 20 : 5 che l' è uguale, si avrà 12+8 : 3+2 : : 20 : 5; laonde, per lo stesso teorema, ne verrà 12+8+20 : 3+2+5 : : 20 : 5 : : 8 : 2 : : 12 : :3 .**

276. ***Se quattro numeri sono in proporzione, le loro potenze, o le loro radici del medesimo grado saranno in proporzione.***

Digitized by Google

Sia la proporzione $27 : 6 :: 9 : 2$. Moltiplicandola termine a termine per la proporzione $27 : 6 :: 9 : 2$ identica alla prima, si avrà

$$27^2 : 6^2 :: 9^2 : 2^2;$$

perciò se quattro numeri sono in proporzione, i loro quadrati saranno in proporzione.

Moltiplicando di nuovo quest' ultima proporzione per la proposta $27 : 6 :: 9 : 2$, termine a termine, si troverà che i cubi sono in proporzione.

Similmente si prosegue per le potenze più elevate.

Scriviamo ora la data proporzione sotto forma di eguaglianza di due frazioni, si avrà $\frac{27}{6} = \frac{9}{2}$; ed estraendo le radici quadrate dai due membri, siccome la radice di una frazione si estrae dal numeratore e dal denominatore, affinchè moltiplicata per sè stessa riproduca la proposta frazione, si avrà

$$\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{2}};\ \text{cioè}\ \sqrt{27} : \sqrt{6} :: \sqrt{9} : 2.$$

Dunque se quattro numeri sono in proporzione le loro radici quadrate saranno ancora in proporzione.

La stessa dimostrazione si fa per le radici cubiche, e di maggior grado.

DEL MEDIO ARITMETICO.

277. Si chiama *medio aritmetico*, o *media* fra più quantità, il quoziente che si ottiene dividendo la somma delle quantità pel loro numero.

Così, per esempio, il medio aritmetico fra 8, 10, 13, 18 sarà $\frac{8+10+13+18}{4} = 12\,{}^1/_4$; ed il medio aritmetico fra 4, 8, 10, 12, 16 sarà $\frac{4+8+10+12+16}{5} = 10$, cioè sarà uno degli stessi numeri dati.

Prendiamo un esempio concreto. Se 4 fanciulli avessero le rispettive età di anni 12, 13, 14 $^1/_2$, e 15, l'età media fra queste età sarebbe

$$\frac{12+12+14^1/_2+15}{4} = 13\,{}^5/_8.$$

Similmente, se si hanno 3 ettolitri di vino, uno di 20 lire l' ettolitro, l' altro di 24 lire, e l' altro di 26 lire ; il *prezzo medio* di queste tre qualità di vino si ottiene dividendo la somma $20+24+26$ per 3, e viene eguale a $^{70}/_{3}=23\,^{1}/_{3}$.

In generale, si dice anche *medio* fra più numeri, ogni numero compreso fra il più grande ed il più picciolo di essi.

Spesso avviene che il medio aritmetico è un numero di cui si fa uso invece di un altro, il quale non può ottenersi con precisione. Così, per esempio, allorchè bisogna misurare una grandezza, il cui valore è necessario che si abbia prossimo per quanto più è possibile all' esattezza: siccome un tal valore non può mai ottenersi esatto, a cagione de' mezzi imperfetti che noi abbiamo, per approssimarci il più che si possa al vero valore, si dà la seguente regola *Si misura più volte la grandezza in parola, e poi la somma di tutte le misure ottenute si divide pel numero che indica quante volte si è misurata*; e così viene a prendersi il medio aritmetico di tutte le misure ottenute.

Per dar ragione di questa regola, indichiamo la grandezza da misurarsi con x, e supponiamo che essa siasi misurata 5 volte, e siansi avute tutte misure eccedenti. È chiaro che la somma di queste misure sarà uguale a 5 volte x più la somma degli eccessi; e però una tal somma dividendosi per 5, si avrà un quoziente uguale ad x più la quinta parte della somma degli eccessi, la quale quinta parte sarà una grandezza intermedia all' eccesso massimo ed al minimo: adunque si otterrà per misura di x una grandezza che supera x di una quantità compresa fra l' eccesso massimo ed il minimo di questi ottenuti.

Così, pure se le misure fossero state tutte in difetto, il medio sarebbe venuto uguale alla grandezza x meno la quinta parte della somma de' difetti; e questa quinta parte sarà intermedia fra il massimo ed il minimo de' difetti ottenuti.

Ma ordinariamente avviene che le misure sono parte in eccesso e parte in difetto; perciò la loro somma sarà uguale a 5 volte x, più la somma degli eccessi meno la somma de' difetti, quale differenza fra somma degli eccessi e somma de' difetti sarà una quantità molto picciola, specialmente quando la grandezza x siasi misurata molte volte; perchè allora avendosi parecchi eccessi e parecchi difetti, è più facile a combi-

narsi che ciascuno degli eccessi si trovi presso a poco uguale a ciascuno de' difetti, e quindi la differenza fra la somma degli eccessi, e la somma de' difetti, riducendosi quasi a zero, il medio si riduce prossimamente uguale alla grandezza x.

CAP. XI.

Applicazione delle proporzioni alla soluzione dei problemi.

QUANTITA' PROPORZIONALI.

278. Una grandezza si dice che è *proporzionale* ad un'altra, ovvero è in *ragion diretta* di un' altra, quando una dipende dall' altra in modo che la prima divenendo doppia, tripla, ec. anche l' altra diviene doppia, tripla, ec.

Così p. es. il prezzo di un canestro di frutti è in ragion diretta del suo peso; perchè il peso divenendo doppio, triplo, ec. anche il prezzo diviene doppio, triplo, ec. Il lavoro fatto da un operaio è in ragion diretta del tempo che ha lavorato, perchè il tempo divenendo doppio, triplo, ec. il lavoro diviene anche doppio, triplo, ec.

Una grandezza si dice che è *inversamente* o *reciprocamente* preporzionale ad un' altra, ovvero in *ragione inversa* o *reciproca* di un'altra, quando l' una dipende dall' altra in modo che la prima divenendo doppia, tripla, ec. l' altra diviene la metà, il terzo, ec.

Così p. es. la lunghezza del panno che bisogna per fare un certo numero di abiti, è in ragione inversa della larghezza; perchè la larghezza divenendo doppia, tripla, ec. la lunghezza diviene la metà, il terzo, ec. Il tempo che s' im-

piega da più persone a fare un certo lavoro, è in ragione inversa del numero delle persone; perchè il numero delle persone divenendo doppio, triplo, ec. il tempo diverrà la metà, il terzo, ec.

Una grandezza può variare in ragion diretta o inversa di più altre. Così p. es. il lavoro fatto da più operai varia in ragion diretta del numero degli operai, ed anche in ragion diretta del tempo impiegato a lavorare. Il numero delle vetture che si richiede a trasportare la medesima massa di terra da un luogo ad un altro, è in ragione inversa del cammino che le vetture fanno in ogni ora, ed anche in ragione inversa del numero delle ore del travaglio giornaliero.

La lunghezza del tessuto che bisogna per fare un certo numero di abiti, è in ragion diretta del numero degli abiti, ed è in ragione inversa della larghezza del tessuto.

REGOLA DEL TRE.

279. Si dice *regola del tre* quella che risolve le questioni in cui entrano quattro o più grandezze a due a due della stessa specie, e la cosa cercata varia in ragion diretta o inversa delle grandezze che sono di specie differente.

Se le grandezze che entrano nella questione sono quattro, la regola si dice *semplice*; se sono più di quattro, si dice *composta*.

La regola del tre semplice si distingue in *diretta* ed *inversa*, secondo che la cosa cercata varia in ragion diretta o inversa della grandezza che è di specie differente.

Dalla definizione della regola del tre si vede che nei problemi relativi ad essa le grandezze che entrano nell' enunciato sono di numero pari; e siccome una di esse è ignota, i dati sono di numero impari.

MANIERA DI RISOLVERE UN PROBLEMA DELLA REGOLA DEL TRE SEMPLICE.

280. *Si rappresenta l' incognita con una lettera, e si scrivono le grandezze dell' enunciato in due linee orizzontali ponendo quelle della stessa specie l' una sotto l' altra, ed affianco ad esse le grandezze corrispondenti.*

Poi si esamina se la cosa cercata varia in ragion diretta o inversa della grandezza corrispondente.

Quando varia in ragion diretta si stabilisce la proporzione: Una delle grandezze sta all' altra della stessa specie come la corrispondente alla prima sta alla corrispondente alla seconda.

Quando varia in ragion inversa si stabilisce la proporzione: Una delle grandezze sta all' altra della stessa specie come la corrispondente alla seconda sta alla corrispondente alla prima (*).

Passiamo agli esempi.

Problema I. Quante miglia percorre in 20 ore un corriere che in 3 ore fa 20 miglia?

Indichiamo l' incognita con x, e scriviamo le grandezze dell' enunciato come qui appresso.

ore	*migl.*
3	8
20	x

Osserviamo che la data questione appartiene alla regola del tre semplice, perchè in essa entrano quattro grandezze a due a due della stessa specie, cioè prime ore e seconde ore, prime miglia corrispondenti alle prime ore, e seconde miglia corrispon-

(*) Senza stabilire la proporzione, può dirsi che: *Quando la regola è diretta, per ottenere l' incognita si moltiplicano le grandezze note che sono in diagonale, e il prodotto si divide per l' altra nota; e quando è inversa, si moltiplicano le grandezze note che sono in linea orizzontale ed il prodotto si divide per l' altra grandezza nota.*

denti alle seconde ore; e si vede che se le prime ore fossero il doppio, il triplo, ec. delle seconde ore, anche le prime miglia saranno il doppio, il triplo, ec. delle seconde miglia; quindi la ragione delle prime alle seconde ore è uguale a quella delle prime alle seconde miglia; perciò la regola è diretta, e si ha la proporzione

$$3 : 20 :: 8 : x;\ \text{da cui si ricava } x = 53\,{}^1/_3.$$

Prob. II. *In quanto tempo 24 operai faranno un lavoro che 15 operai hanno fatto in 7 giorni?*

Questa questione appartiene alla regola del tre semplice per le ragioni dette nel primo problema; qui osserviamo che se i primi operai fossero il doppio, il triplo, ec. dei secondi operai, i primi giorni saranno la metà, il terzo, ec. dei secondi giorni; quindi la ragione dei primi ai secondi operai è uguale a quella dei secondi ai primi giorni, vale a dire è inversa della ragione dei primi ai secondi giorni; perciò si ha la proporzione $24 : 15 :: 7 : x$, da cui si ricava $x = 4\,{}^3/_8$.

op.	*gior.*
15	7
24	x

Qui avvertiamo che $^3/_8$ di giorno, non s' intende che sia $^3/_8$ della intera giornata, ma deve intendersi $^3/_8$ del tempo che gli operai lavorano in un giorno: così, se le ore di lavoro giornaliero sono 10, deve intendersi $^3/_8$ di 10 ore, che fanno ore $3\,{}^3/_4$.

Prob. III. *Si domanda quanto costano 3 libbre e 10 once di un gallone d' oro, conoscendosi che 8 libbre, 5 once, e 20 trappesi costano 230 ducati, e 60 grani.*

Poichè al crescere del peso del gallone, cresce il prezzo, il problema appartiene alla regola del tre diretta, e la proporzione che dà il valore dell' incognita sarà

lib.	*on.*	*tr.*		*lib.*	*on.*		*duc.*	*gr.*		
8	5	20	:	3	10	::	230	60	:	x.

Si troverebbe dunque x facendo una moltiplicazione ed una divisione di numeri complessi.

Ma qui, ed in tutti i casi consimili, riesce più comodo, co-

me accennammo nel n.° 250, ridurre i numeri complessi in unità della specie più piccola che trovasi in ciascuna ragione; e perciò convien convertire le libbre e le once in trappesi, ed i ducati in grani: in tal modo l'incognita esprimerà grani, ossia unità eguali a quelle dell' altro termine della ragione a cui appartiene l'incognita; e la proporzione di sopra si ridurrà alla seguente, $3050^{tr.} : 1380^{tr.} :: 23060^{gr.} : x^{gr.}$; da cui si ricava $x = gr. 10433\,{}^{43}/_{61} = duc.\ 104{,}34$.

Prob. IV. Per vestire un Reggimento sono bisognati 7200 metri di un panno largo metri 1,35. Quanti metri bisogneranno per vestirlo di un panno largo 90 centimetri?

Qui si osserva che diminuendo la larghezza del panno, cresce in ragione inversa la lunghezza; perciò la regola è inversa, e l' incognita vien data dalla proporzione $9 : 135 :: 7200 : x$, da cui si ricava $x = 10800$ metri.

Prob. V. Una fontana, che in $2^{or.}\ 24'$ ha riempito 9 botti di acqua, in quanto tempo riempirà 34 botti e 5 barili?

Qui la regola è diretta, e si trova $x = 9^{o}\ 10'\ 40''$.

Prob. VI. Un giardino apprezzato al 4 per 100 si è pagato 12000 lire; ma poi, quantunque continuasse a dare la stessa rendita, si è rivenduto al $5\,{}^{1}/_{2}$ per 100. Si domanda quanto è il secondo valore del giardino.

Avvertiamo che al 4 per 100 significa che, per ogni 4 lire di frutto annuale che dà il giardino, si pagano 100 lire. Lo stesso si dica del $5\,{}^{1}/_{2}$ per 100. Dopo ciò si vede che la regola è inversa, e si avrà l' incognita $x = lire\ 8727{,}27$.

METODO DI RIDUZIONE ALL' UNITÀ.

281. Evvi un altro metodo per risolvere i problemi della regola del tre, senza bisogno delle proporzioni: esso dicesi METODO DI RIDUZIONE ALL' UNITÀ.

Questo metodo consiste in trovare prima il valore della cosa cercata il quale corrisponde all' unità, e poi si trova il

valore corrispondente a quel numero che si vuole, e questo valore si ottiene moltiplicando, o dividendo quello corrispondente all' unità pel detto numero, secondo che varia in ragion diretta o inversa di questo numero.

Così nell' esempio in cui si cerca quante miglia fa in 20 ore un corriere che in 3 ore ha fatto 8 miglia, si trova prima il numero delle miglia che il corriere fa in un ora, il quale è $^{8}/_{3}$, perchè si ottiene dividendo per 3 le 8 miglia fatte in 3 ore; quindi per avere le x miglia percorse in 20 ore si moltiplicano quelle fatte in un ora per 20, e si avrà

$$x = \frac{8 \times 20}{3} = 53\,^{1}/_{3}.$$

Parimente nell' esempio in cui si cerca in quanto tempo 24 operai fanno un lavoro che 15 operai hanno fatto in 7 giorni. Si trova prima il tempo corrispondente ad un solo operaio che si ottiene moltiplicando per 15 il tempo 7 giorni impiegato da 15 operai, perchè un solo operaio v' impiega un tempo 15 volte maggiore; e poi il tempo 7×15 impiegato da un solo operaio si divide per 24, per avere il tempo impiegato da 24 operai che deve essere 24 volte minore; e verrà il tempo cercato $x = \frac{7 \times 15}{24} = 4\,^{3}/_{8}.$

MANIERA DI RISOLVERE I PROBLEMI DELLA REGOLA DEL TRE COMPOSTA.

282. *Si rappresenta l' incognita con una lettera, e si scrivono le grandezze dell' enunciato in due linee orizzontali ponendo in una la cosa cercata e le grandezze corrispondenti, e nell' altra la cosa data della stessa specie della cercata e le grandezze corrispondenti, in modo che quelle della stessa specie sieno l' una sotto l' altra.*

Poi si esamina se la cosa cercata varia in ragion diretta o

inversa delle grandezze che sono di specie differente; e si scambiano di posto nelle due linee le grandezze della stessa specie, rispetto a cui varia in ragione inversa.

Infine si stabilisce la proporzione:

Cosa cercata sta alla data della stessa specie, come il prodotto dei numeri che sono nella linea della cosa cercata sta al prodotto dei rimanenti numeri che sono nell' altra linea (*).

Passiamo ora alle applicazioni.

Problema VII. Se per costruire un muro che ha 70 metri di lunghezza e 2 di grossezza in 28 giorni sono bisognati 50 operai; quanti ne bisognano per costruirne un altro che abbia 60 metri di lunghezza, e 3 di grossezza in 20 giorni?

Indichiamo l'incognita con x, e scriviamo le grandezze con l' ordine seguente.

lung.	*gros.*	*gior.*	*op.*
70	2	28	50
60	3	20	x

Ciò premesso, osserviamo che questa questione appartiene alla regola del tre composta; perchè in essa entrano più di quattro grandezze, a due a due della stessa specie, e la cosa cercata varia in ragion diretta ed inversa delle grandezze che sono di specie differente. Difatti, raddoppiandosi la lunghezza si raddoppia il numero degli operai; e raddoppiandosi la grossezza anche si raddoppia il numero degli operai; ma raddoppiandosi il numero dei giorni, diviene metà il numero degli operai.

Ora per trovare l' incognita scorgiamo che la questione si riduce a risolvere più regole del tre semplici. In effetti, facciamo variare la sola lunghezza del muro, che è 70, e divenga 60, il numero degli operai che prima era 50, si riduce ad un altro che denotiamo con x'; e siccome gli operai

(*) Senza stabilire la proporzione può dirsi che: *La cosa cercata si trova moltiplicando la cosa data della stessa specie per tutti i numeri che sono nella linea della cosa cercata, e dividendo il prodotto per quello dei rimanenti numeri.*

variano in ragion diretta della lunghezza del muro, si avrà la proporzione

$$70 : 60 :: 50 : x'$$

Facciamo ora variare la grossezza che è 2, e divenga 3; il numero dei giorni che era x' si riduce ad un altro che indichiamo con x''; e siccome essi variano in ragion diretta della grossezza del muro, si avrà la proporzione

$$2 : 3 :: x' : x''.$$

Infine facciamo variare il numero dei giorni che prima era 28, e divenga 20, il numero degli operai che era x'' si ridurrà ad un altro che dinotiamo con x: e siccome gli operai variano in ragione inversa dei giorni, si avrà la proporzione

$$20 : 28 :: x'' : x.$$

Ora per avere il valore cercato di x si potrebbe ricavare quello di x' dalla prima proporzione, e metterlo nella seconda; poi da questa si ricaverebbe il valore di x'', il quale li porrebbe nella terza; ed infine dalla terza si ricaverebbe il valore di x; ma senza trovare i valori di x', x'', ed x delle suddette proporzioni, si può trovare quello dell'incognita x direttamente con una sola proporzione; imperocchè moltiplicando per ordine le date proporzioni, si avrà l'altra

$$70 \times 2 \times 20 : 60 \times 3 \times 28 :: 50 \times x' \times x'' : x' \times x'' \times x.$$

In questa proporzione, sopprimendo i fattori comuni x', x'', ai termini del secondo rapporto, si avrà infine la proporzione $70 \times 2 \times 20 : 60 \times 3 \times 28 :: 50 : x$,

da cui si ricava $x = \frac{50 \times 60 \times 3 \times 28}{70 \times 2 \times 20} = 90.$

Da quì si desume la regola per trovare l'incognita; cioè.

Dopo di essersi scritte le grandezze della stessa specie l'una sotto l'altra in modo che le corrispondenti sieno in una stessa linea orizzontale; e dopo esaminato se la cosa cercata varia in ragion diretta o inversa delle grandezze che sono

di specie differente; e dopo scambiate di posto fra loro le grandezze della stessa specie che variano in ragione inversa della cosa cercata, l'incognita verrà data dalla proporzione detta nella regola

Se dividiamo il numero x degli operai cercati pel numero 50 degli operai dati, si avrà $\frac{x}{50}=\frac{60\times3\times28}{70\times2\times20}$. Da quest' eguaglianza si rileva che la ragione della cosa cercata alla data della stessa specie è composta da tutte le altre ragioni fra le rimanenti grandezze che entrano nell' enunciato del problema; cioè dalla diretta delle lunghezze, dalla diretta delle grossezze, e dalla inversa dei giorni.

Prob. VIII. *Se 8 machine che agiscono 10 ore al giorno con egual velocità hanno fatto un certo lavoro in 35 giorni; si domanda quanto tempo dovranno impiegare a fare la stessa quantità di lavoro 5 machine, che agiscono 14 ore al giorno con una velocità tripla di quella delle prime.*

Osserviamo primieramente che la velocità di ciascuna delle seconde machine essendo tripla di quella di ciascuna delle prime, se la velocità delle prime si rappresenta con 1, quella delle seconde verrà rappresentata da 3; e però le grandezze dell'enunciato del problema dovranno scriversi come si vede quí affianco.

mach.	or.	vel.	gior.
8	10	1	35
5	14	3	x

Ora siccome la cosa cercata varia in ragione inversa di tutte le grandezze che sono di specie differente, la proporzione da stabilirsi sarà $x : 35 :: 8\times10\times1 : 5\times14\times3$, da cui si ricava $x=13\,^1/_3$. Or poichè la durata del lavoro giornaliero delle seconde machine è di ore 14, e la terza parte di 14 ore è $4^{o}\ 40'$, si avrà $x=13^{gio.}\ 4^{o.}\ 40'$.

Prob. IX. *Il capitano di una nave sulla quale erano 90 persone, per un viaggio di 40 giorni ha speso 250 lire a biscotto, pagato a 33 centesimi il chilogrammo. Dovendo poi intraprendere un viaggio di 5 mesi con 160 persone, e dovendo comprare il biscotto a 38 centesimi il chilogrammo; si domanda che danaro dovrà spendere?*

Digitized by Google

In questo problema la cosa cercata varia in ragion diretta di tutte le grandezze che sono di specie differente, e si trova eguale a lire 1919,19.

Prob. X. In quanto tempo 15 mortai, che sparano senza interruzione, gitteranno in una fortezza 10000 bombe, conoscendosi che 8 mortai in 2 ore ne gittano 192?

Risposta: in 55°· 33′ 20″.

Prob. XI. Supposta uniforme la dilatazione lineare dell'oro, che si è sperimentata essere di 0,0014641 per i 100 gradi del termometro centigrado; si domanda di quanto si allunga una verga d'oro di palmi 3,15 in Napoli passando dal massimo freddo d'inverno che è (in media) di —1°,14, al massimo caldo di està che è 34°, 37.

Risposta: di 0,00114641 × 3,15 × 0,3551 = 0,00165769.

Avvertimento. Come nel problema I, così nel problema VIII. abbiamo veduto che la frazione $^1/_3$ di giorno significa $^1/_3$ del tempo del lavoro giornaliero, il quale essendo di 14 ore, si è preso perciò la terza parte di 14 ore, e non già di tutte le 24 ore che compongono l'intero giorno. Vi sono altri problemi nei quali si cerca p. e. quante persone si richieggono per fare un certo lavoro, e l'incognita si trova eguale ad un certo numero intero di persone più una frazione, p. e. a 5 persone e $^3/_4$; in questo caso e negli altri consimili la frazione $^3/_4$ vuol dire che, oltre del numero intero 5 delle persone, si richiede dippiù un'altra persona, o un agente qualunque, che faccia $^3/_4$ del lavoro fatto da ciascuna delle 5 persone.

METODO DI RIDUZIONE ALL' UNITÀ.

283. Abbiamo già detto nel n.° 281 in che consiste questo metodo; applicandolo all'esempio del problema VII, si dirà:

Siccome per costruire un muro avente 70 metri di lunghezza, e 2 di grossezza, in 28 giorni sono bisognati 50 operai; se la lunghezza invece di 70 metri si riducesse ad un

metro, tutte le altre cose restando le stesse, il numero degli operai sarà 70 volte minore, cioè sarà $\frac{50}{70}$; e quindi per un muro che ha 60 metri di lunghezza, il numero degli operai sarà $\frac{50\times60}{75}$. Ora restando 60 la lunghezza, se la grossezza invece di 2 metri fosse un metro, il numero degli operai sarebbe 2 volte minore, cioè sarebbe $\frac{50\times60}{70\times2}$; e quindi per un muro di 3 metri di grossezza il numero degli operai sarà $\frac{50\times60\times3}{70\times2}$. Infine restando 60 la lunghezza e 3 la grossezza, se il numero dei giorni si riducesse ad 1, cioè divenisse 28 volte minore, viceversa il numero degli operai sarebbe 28 volte maggiore, cioè sarebbe $\frac{50\times60\times3\times28}{75\times2}$; ma i giorni essendo 20, il cercato numero di operai sarà uguale al precedente diviso per 20, cioè sarà $\frac{50\times60\times3\times28}{70\times2\times20}$.

ALTRA MANIERA DI CONSIDERARE LA REGOLA DEL TRE.

284. Avendo parlato nel n.° 278 di grandezze che variano in ragion diretta o inversa di altre grandezze, è importante stabilire la seguente proporzione.

Allorchè una grandezza A *dipende da più altre, p. e. da cinque, che indico con* m, n, p, q, r. *e varia in ragion diretta di* m, n, p, *ed in ragione inversa di* q *ed* r, *essa è proporzionale al prodotto* $m\times n\times p\times\frac{1}{q}\times\frac{1}{r}$: cioè è proporzionale al prodotto di quelle da cui

Digitized by Google

dipende in ragion diretta diviso pel prodotto di quelle da cui dipende in ragione inversa.

Difatti, se il fattore m diviene doppio, triplo, ec., la grandezza A per ipotesi anche diviene doppia, tripla, ec., ed il prodotto $m \times n \times p \times \frac{1}{q} \times \frac{1}{r}$ pure diviene doppio, triplo, ec.; perciò A varia in ragion diretta di questo prodotto. Lo stesso si dirà dei fattori n e p, ed il contrario dei fattori q ed r.

Ciò premesso, passiamo a dare un' altra definizione della regola del tre.

La *Regola del tre* è quella che insegna a risolvere i problemi in cui l' incognita dipende da una o più grandezze al variar delle quali essa varia in ragion diretta o inversa delle stesse. Questa regola si distingue in *semplice* e *composta*, secondo che le grandezze da cui la cosa cercata dipende sono una o più.

Nei detti problemi si conosce un valore della grandezza dipendente, corrispondente ad un particolare valore di quelle da cui dipende, e si cerca il valore che essa acquista relativamente ad altri valori che si danno alle grandezze dalle quali dipende. Tali problemi, per la proposizione poco fa stabilita, si risolvono mediante la seguente regola generale.

Il valore incognito della grandezza dipendente sta al valore noto di essa, come il prodotto delle grandezze dalle quali dipende corrispondenti al valore incognito, sta al prodotto delle medesime grandezze corrispondenti al valore noto, avendo cura di invertire i fattori che variano in ragione inversa della grandezza dipendente.

QUISTIONI D' INTERESSE.

285. Allorchè s' impresta danaro, si dà ordinariamente con la condizione che dopo un certo tempo deve restituirsi non solo il danaro imprestato ma anche un dippiù di utile che si dice *interesse*; perchè colui che li ha imprestato, avrebbe potuto ricavarne un utile facendone altro uso.

L' interesse dopo un anno si chiama *rendita*.

Digitized by Google

Il danaro imprestato si chiama *capitale*, *fondo*, o *sorte principale*. Il rapporto fra l'interesse dopo un anno ed il capitale corrispondente si chiama *ragione dell' interesse*.

La ragione dell' interesse si stabilisce fra il capitale 100 ed il suo interesse dopo un anno; perciò il capitale 100 si dice *capitale elementare* o di *paragone*.

Dunque quando si dice che il capitale è stato impiegato al 6 per 100, significa che dopo un anno, per ogni 100 lire di capitale debbonsi pagare 6 lire d' interesse; e perciò la rendita è $^6/_{100}$ del capitale.

La rendita del capitale elementare 100 si dice anche *tassa;* ed il capitale dicesi *tassato* p. es. al *6 per cento*, e si scrive così *6°/₀*. Ciò premesso:

La *regola d' interesse* è quella che risolve le questioni relative ai capitali, loro interessi, e tempi in cui sono stati impiegati.

Le questioni d' interesse appartengono alla regola del tre semplice quando i capitali sono impiegati per lo stesso tempo, ed alla regola del tre composta quando sono impiegati per tempi diversi.

Ciò vien rischiarato da' seguenti esempi.

I. ***Il capitale di 860 ducati impiegato alla ragione del 6 per 100, che rendita darà?***

È facile vedere che questo problema appartiene alla regola del tre semplice, perchè al crescere del capitale cresce proporzionalmente la rendita; quindi la proporzione che darà il valore dell' incognita è $100 : 860 :: 6 : x$, da cui si ricava

$$x = \frac{860 \times 6}{100} = 51,6.$$

Dunque: *si ottiene la rendita moltiplicando il capitale per la tassa, e dividendo il prodotto per 100.*

II. *Qual capitale si richiede per avere 72 ducati di rendita alla ragione del 4 p°/₀?*

Quì la proporzione che dà l' incognita è $4 : 72 :: 100 : x$, dalla quale si trae $x = \frac{72 \times 100}{4} = 1800$.

Dunque: *si ottiene il capitale moltiplicando la sua rendita per 100, e dividendo il prodotto per la tassa.*

III. *A qual ragione è stato impiegato il capitale di 2300 lire che ha dato di rendita 140 lire?*

Risposta: alla ragione di $6\,{}^{2}/_{23}$, ossia di $6{,}09\,\%$.

286. Passiamo ora a quei problemi in cui i tempi sono diversi.

cap.	*tem.*	*int.*
100	360	6
c	T.	I

Scriviamo in una linea orizzontale il capitale elementare 100, il tempo corrispondente 360 (*) e l' interesse che supponiamo essere 6; e poniamo al di sotto in un'altra linea le grandezze variabili della stessa specie delle prime, che sono il capitale, il tempo, e l' interesse corrispondente, indicandole con le lettere iniziali c, T, I.

Ora scorgiamo che quando si cerca l' interesse, esso varia in ragione diretta del capitale e del tempo; perchè, crescendo il capitale e il tempo, cresce l' interesse; perciò la proporzione che dà l' interesse è

$$I : 6 :: c \times T : 100 \times 360.$$

Quando si cerca il capitale si vede che esso varia in ragion diretta dell' interesse, ed in ragione inversa del tempo, perchè crescendo il capitale, cresce l' interesse, e crescendo il tempo ci vuole meno capitale per avere lo stesso interesse, perciò la proporzione che dà il capitale è

$$c : 100 :: I \times 360 :: T \times 6.$$

Quando si cerca il tempo, si vede che esso varia in ra-

(*) A rigore il tempo dovrebbe essere 365 giorni, ma per semplicità di calcolo, si considera l' anno di 360 giorni, come se tutti i mesi fossero di 30 giorni, essendo disprezzabile l'errore che si ha nel risultato.

Digitized by Google

gion diretta dell' interesse ed in ragione inversa del capitale; perchè crescendo il tempo, cresce l' interesse , e crescendo il capitale, ci vuole meno tempo per avere lo stesso interesse; perciò la proporzione che dà il tempo è

$$T : 360 :: I \times 100 : C \times 6.$$

Dalle tre precedenti proporzioni ricavando i valori di I, C, T, cioè dell' interesse, del capitale, e del tempo, si ha

$$I = \frac{6 \times C \times T}{100 \times 360},\ C = \frac{I \times 100 \times 360}{6 \times T},\ T = \frac{I \times 100 \times 360}{6 \times C}.$$

Da questi valori si desumono le seguenti regole:

L' interesse è uguale al prodotto della tassa pel capitale e tempo variabile diviso pel prodotto del capitale e tempo fisso.

Il capitale è uguale al prodotto dell'interesse pel capitale e tempo fisso diviso per la tassa moltiplicata pel tempo.

Il tempo è uguale al medesimo prodotto diviso per la tassa moltiplicata pel capitale.

287 Qui diamo una regola per calcolare l' interesse al 6 $^o/_o$, perchè essa giova a far trovare con facilità gli altri interessi.

Si moltiplica il capitale pel numero dei giorni, dalla dritta del prodotto si cancellano una o tre cifre, secondo che è intero o dinota centesimi, il numero che ne risulta si divide per 6, e dal quoto si separano due cifre decimali.

La ragione si è perchè supprimendo il fattore 6 comune ai termini della frazione $\frac{6 \times C \times T}{100 \times 360}$ che esprime l'interesse, essa si riduce a $\frac{C \times T}{6000}$; e perciò il suo valore si ha moltiplicando il capitale pel tempo, e dopo dividendo per 6000 ; ma siccome il quoziente si vuole in 100^{mi} bisogna prima ridurre il prodotto in 100^{mi} quando è intero, aggiungendovi due zeri a dritta, e poi si divide per 6000, la quale divisione si fa cancellando tre cifre a dritta del prodotto, e dividendo il numero che ne risulta per 6; quindi allorchè il prodotto è intero, senza aggiungere due zeri, si cancella una sola cifra dalla sua dritta , e si divide per 6 , e quando è decimale espresso in 100^{mi} si cancellano tre cifre, e si divi-

de per 6, e dopo in ambedue i casi, si separano due cifre decimali dal quoziente.

288. Nelle questioni d' interesse è importante conoscere la regola che dà il valore di un capitale unito al suo interesse dopo un dato tempo: Essa è la seguente.

Il valore di un capitale unito al suo interesse dopo un dato tempo si ottiene moltiplicando il capitale per l' unità accresciuta dall' interesse dell' unità dopo quel tempo.

Così p. e. se si volesse il valore che acquista un capitale di 840 lire impiegato al 6°/₀ unito all'interesse dopo 7 mesi; siccome l' interesse dell' unità è 0,06, quello dell' unità dopo 7 mesi sarà $0{,}06 \times \frac{7}{12} = \frac{0{,}01 \times 7}{2} = 0{,}035$; perciò il valore del capitale unito all'interesse è $840 \times 1{,}035 = 869{,}40$.

Per dimostrare questa regola, chiamo x l' interesse dell' unità dopo un certo tempo, e sia 520 il capitale. È chiaro che se l' unità dopo un certo tempo dà per interesse x, il capitale 520 darà per interesse $520 \times x$; perciò dopo il detto tempo il capitale 520 unito al suo interesse diviene $520 + 520 \times x$, cioè 520 preso una volta più x volte, ossia $520 \times (1 + x)$.

289. Vi sono altre specie di contratti che diconsi d'*interessi composti* o *interessi a moltiplico*, d' *interessi a scalare*, e *di annualità e vitalizii*; ma queste questioni non possono convenientemente risolversi senza la conoscenza della teoria delle progressioni e dei logaritmi; cosa che ci siamo astenuti di esporre in questo libro fatto per i corsi ginnasiali, perchè le nominate questioni sogliono trattarsi nei corsi elementari di algebra che appartengono all'insegnamento liceale. D'altronde noi crediamo che le accennate questioni potendosi completamente risolvere con l'aritmetica, debbano perciò esser trattate nei corsi estesi di aritmetica, come per lo più si fa da gravi autori; e noi non abbiamo mancato di esporle nel nostro corso esteso di aritmetica, che può consultarsi da chi ne avesse vaghezza.

CALCOLO DEGL' INTERESSI MEDIANTE QUELLO DEL 6 %.

290. Mediante l'interesse al 6 % si possono calcolare quelli al 6 $^1/_2$ al 7, al 7 $^1/_2$, ec. sempre aumentando o diminuendo di $^1/_2$. Ciò si fa nel seguente modo.

Si prendono tanti 12^{mi} dell'interesse al 6 % quanti mezzi più del 6 % è l'interesse che si vuole calcolare, e si aggiungono all'interesse al 6 %, e così si avrà l'interesse cercato.

In effetti, siccome sul capitale 100 si ha l'interesse 6; se l'interesse su di 100 si aumenta di $^1/_2$, che è $^1/_{12}$ di 6, su di un capitale qualunque l'interesse deve aumentarsi di $^1/_{12}$ di quello che era al 6 %; quindi dopo trovato l'interesse al 6 %, se ad esso si aggiunge il suo 12mo, si avrà l'interesse al 6 $^1/_2$ %, e se si aggiungono $^2/_{12}$ si avrà quello al 7 %, e se $^3/_{12}$ si avrà quello al 7 $^1/_2$ %, e così di seguito.

Così p. e. per avere l'interesse del capitale di lire 584 al 6 $^1/_2$ % dopo 75 giorni, si trova prima quello al 6 % moltiplicando 584 per 75, e cancellando la cifra a dritta del prodotto 23800, il numero 4380 che rimane si divide per 6, e dal quoto si separano due decimali, e si avrà l'interesse al 6 % eguale a 7,30. Indi a questo si aggiunge il suo 12mo che è 0,60, e si avrà l'interesse al 6 $^1/_2$ % eguale a 7,90.

Se si volesse l'interesse al 7 %, si dovrà aumentare quello al 6 dei suoi $^2/_{12}$ ossia di $^1/_6$ di sè stesso; perciò divideremo 7,30 per 6, ed il quoziente 1,21 si aggiunge a 7,30, e si ha l'interesse al 7 % eguale a 8,51.

Se si vuole l'interesse al 7 $^1/_2$ % si aggiungono a 7,30 i suoi $^3/_{12}$ ossia $^1/_4$, che è 1,82, e si ha quello al 7 $^1/_2$ eguale a 9,12. Per avere quello all' 8 % si aggiungono a 7,30 i suoi $^4/_{12}$ ossia $^1/_3$, che è 2,43, e viene eguale a 9,73.

Per avere quello all' 8 $^1/_2$ %, si aggiungono a 7,30 i suoi $^5/_{12}$, che si possono scomporre in $^3/_{12}+^2/_{12}$, ossia in $^1/_4+^1/_6$; ma è più comodo scomporli in $^4/_{12}+^1/_{12}$, ossia in $^1/_3+^1/_4$ di $^1/_3$ di 7,30; perciò prima si divide 7,30 per 3, e poi il quoziente 2,43 si divide per 4, e si ha 0,60; poi i due quozienti si uniscono a 7,30 come qui affianco, e si avrà l'interesse all' 8 $^1/_2$ % eguale a 10,33.	7,30 2,43 0,60 10,33

Se si volesse l'interesse al 5 $^1/_2$ $^0/_0$, si toglie da 7,30 la sua 12ma parte, e viene eguale a 6,70. E se si volesse l'interesse al 5 $^0/_0$, si tolgono da 7,30 i suoi $^2/_{12}$ ossia $^1/_6$, e viene eguale a 6,09.

Se l'interesse variasse per quarti, cioè fosse al 6 $^1/_4$, al 6 $^3/_4$, al 7 $^1/_4$, ec.*, si può pure ricavare da quello al 6 $^0/_0$, aggiungendo o togliendo a questo, tante volte la sua 24ma parte quanti quarti vi sono dippiù o di meno del 6 $^0/_0$. Ciò perchè $^1/_{24}$ essendo metà di $^1/_{12}$, e l'interesse che aumenta per mezzi si ottiene aggiungendo a quello al 6 $^0/_0$ i suoi 12^{mi}, l'interesse che aumenta per quarti si otterrà aggiungendo a quello al 6 $^0/_0$ i suoi 24^{mi}. L'operazione è pure facile, perchè basta aggiungere o togliere a quello calcolato per unità i $^3/_{24}$, ossia $^1/_8$ di quello al 6 $^0/_0$.

Giova non correggere nel calcolo la cifra dei 100^{mi}, perchè il quoziente è sempre maggiore del vero, per la ragione che il numero dei giorni 360 che fa da divisore è minore del vero 365.

QUESTIONI DI SCONTO E DI RENDITA CONSOLIDATA.

291. Lo *sconto* è l'interesse anticipato che una persona si ritiene su di una somma data ad un'altra persona, per averne la restituzione dopo un certo tempo, il cui termine si dice *scadenza* del pagamento.

Dunque per trovare lo sconto non si deve far altro che calcolare l'interesse prodotto dopo un certo tempo da un capitale impiegato ad una data ragione.

In commercio spesso si ha bisogno di calcolare lo sconto di una *cambiale* o di un *biglietto ad ordine*.

La *cambiale* è un titolo con cui un negoziante autorizza una persona ad esigersi in un'altra *piazza* di commercio da un'altra persona che è in relazione commerciale col negoziante, una determinata somma dopo un certo tempo.

Il negoziante si dice che *trae* la cambiale la quale perciò suole chiamarsi *tratta*. La persona a favore di cui si rilascia la cambiale per esigerne la *valuta* nel giorno della scadenza si dice *possessore* della cambiale. Il possessore può *girare* la cambiale ad un altro individuo che dicesi *giratario*; e la *girata* si fa scrivendo a piedi o nel dorso

Digitized by Google

della cambiale poche parole con cui si dichiara che il pagamento invece di farsi a lui si faccia ad un altro, il quale diviene possessore della cambiale.

Se il possessore della cambiale ha bisogno di danaro prima della scadenza, può farselo anticipare da colui che deve pagar la valuta della cambiale, o anche da un altro negoziante, purchè questi abbia fiducia nella solvibilità di chi deve fare il pagamento; ed allora chi anticipa il danaro al possessore delle cambiale si ritiene su di esso l' interesse calcolato sino al giorno della scadenza ; questo interesse è appunto lo *sconto*.

Il *biglietto ad ordine* differisce dalla cambiale, perchè il pagamento non si fa da piazza a piazza, ma si fa nella medesima piazza e dalla medesima persona che rilascia il biglietto ad ordine. Ciò avviene, quando un negoziante compra merci con l' obbligo espresso nel biglietto di pagarne la valuta dopo un determinato tempo; ed avviene pure quando si prende danaro a prestito con l' obbligo di restituirlo dopo un dato tempo: in tal caso chi impresta si ritiene gl' interessi anticipati ossia lo *sconto*. Il biglietto ad ordine può girarsi come la cambiale.

La somma da esigersi alla scadenza si dice *valore nominale* della cambiale: la somma che si anticipa, la quale pareggia la differenza fra il valore nominale e lo sconto, dicesi *valore attuale* della cambiale.

292. Passiamo ora a risolvere la seguente questione relativa allo *sconto*.

1. *Qual'è lo sconto che deve ritenersi su di una cambiale di lire 2500 un negoziante che ne anticipa il pagamento 5 mesi e 12 giorni prima della scadenza, e che impiega il danaro al 7 $^1/_2$ $^0/_0$?*

La regola d'interesse dà

$$x = \frac{7,50 \times 2500 \times 162}{100 \times 365} = \frac{7,50 \times 5 \times 162}{73} = 83,22.$$

Se l' interesse si calcola come nel n.° 290 si trova eguale ad 84,37.

293. Lo sconto come l' abbiamo calcolato si dice *preso al di fuori*; e così ordinariamente viene calcolato dai negozianti, ma si vede che non è questa la giusta maniera di calcolarlo; perchè in tal modo l'interesse che il negoziante si prende non è sul danaro che anticipa, ma è su di una somma maggiore, cioè su tutto il valor nominale delle cambiale.

Volendo calcolare lo sconto con esattezza, ecco come può operarsi.

Digitized by Google

Chiamo a il valore della cambiale ed x la somma che il negoziante deve anticipare, cioè il valore attuale della cambiale. È chiaro che la somma x la quale anticipa il negoziante, deve esser tale che aggiunta all'interesse che produrrebbe sino al giorno della scadenza, deve eguagliare il valore a della cambiale.

Ma sappiamo che la somma x aggiunta all'interesse che produce sino al giorno della scadenza, si ottiene moltiplicando x per l'unità accresciuta dell'interesse dell'unità sino al detto giorno; perciò, se indichiamo con r questo interesse dell'unità, la somma x nel giorno della scadenza diverrà $x\times(1+r)$; e siccome questa deve eguagliare il valore nominale a della cambiale, si avrà $x\times(1+r)=a$; e dividendo i due membri pel fattore $1+r$, si avrà $x=\frac{a}{1+r}$.

Dunque: ***il valore attuale della cambiale si ottiene dividendo il valore nominale per l'unità aumentata dell'interesse dell'unità calcolato sino al giorno della scadenza.***

Applichiamo ora questa regola all'esempio del n.° precedente, prendendo lo sconto ***al di dentro***. Siccome l'interesse dell'unità dopo 162 giorni è

$$\frac{0,075\times162}{365}=\frac{0,015\times162}{73}=0,033,\text{ verrà } x=\frac{2500}{1,033}=2420,13.$$

Ora se togliamo questo valore attuale della cambiale dal valore nominale si avrà lo sconto, che viene eguale a lire 79,87; perciò è minore di quello preso al di fuori, e n'è minore di lire 3,35.

294. Allorchè si conosce lo sconto preso al di dentro, e si vuol trovare a qual ragione si è impiegato il danaro, bisogna dividere lo sconto per il valore attuale, il quoziente sarà l'interesse dell'unità sino al giorno della scadenza; da questo interesse si desumerà quello dell'unità dopo l'anno, ed infine l'interesse di 100 che è quello cercato. In effetti, dall'eguaglianza $x(1+r)=a$, dividendo per x, si ha $1+r=\frac{a}{x}$, e togliendo l'unità dai due membri verrà $r=\frac{a}{x}-1=\frac{a-x}{x}$, ma $a-x$ è lo sconto, per essere x il valore attuale, ed r è l'interesse dell'unità; ecco dunque che questo interesse si ottiene nel modo suddetto.

295. Allorchè un Governo ha bisogno di danaro contrae un debito

con i particolari, che dicesi *Debito Pubblico*, pagandone l'interesse ad una determinata ragione, p. e. al 5 °/o; e perchè i nomi dei creditori si scrivono in un registro destinato all'uopo che vien detto *Gran Libro*, la rendita che essi debbono esigere si dice *consolidata o iscritta*. Ma, per non rendere inceppati i capitali dei creditori, si permette che essi possano vendere la loro rendita ad altre persone, dovendosi dichiarare e garantire dagli *Agenti di cambio* sull'Ufficio del Gran Libro la persona che vende e quella che compra, affinchè la rendita iscritta in testa ad uno possa *trasferirsi* in testa ad un altro; in seguito di ciò si scrive sul Gran Libro il nome del nuovo possessore della rendita.

Vi è anche la rendita *al latore*, ed è quella in cui il Governo rilascia ai creditori un titolo detto *Cartella al latore*, senza che in esso sia scritto il nome del creditore, pagandosi dal Governo la rendita a chi presenta questo titolo, ossia al latore della Cartella, e propriamente al latore di un cartellino detto *Cedola* o *Cupone* che si distacca dal lato della cartella quando matura il semestre; e perciò se la cartella si disperdesse dal possessore, e si trovasse da persona di mala fede che volesse profittarne, questa diverrebbe padrona della rendita, perchè il Governo riguarda come suo creditore chi gli presenta la Cedola, ossia il latore della stessa.

La rendita consolidata potendosi vendere come ogni altra mercanzia, può aumentare e diminuire di prezzo, secondo le maggiori o minori ricerche che se ne hanno. Le contrattazioni di rendita si fanno un locale detto *Borsa*, dove si fanno tutte le grandi contrattazioni commerciali, e se ne fissa il prezzo dagli *Agenti di cambio*. La variazione del prezzo della rendita cade sul capitale, perchè l'interesse si considera fisso. Nella rendita del debito pubblico italiano l'interesse fisso è al 5 °/o, ed il capitale può variare; così p. e. se in un giorno il prezzo della rendita nella Borsa è di 92 lire, e nel giorno seguente è di 93 lire, vuol dire che 5 lire di rendita, che il giorno precedente si compravano per 92 lire, il giorno seguente debbono pagarsi 93 lire.

Ogni unità di variazione sulla rendita suole chiamarsi *punto*; perciò nell'esempio acccennato l'aumento di una lira da un giorno ad un altro corrisponde all'aumento di un punto; e se nel giorno seguente ai due considerati, 5 lire di rendita si vendessero per lire 94,45, la rendita sarebbe aumentata di punti 2,45 rispetto al primo giorno che si vendeva al prezzo di lire 92.

Il *corso* della rendita e quindi il *prezzo* si legge ogni giorno su i *listini* della Borsa, che sogliono inserirsi anche su i giornali.

Dietro queste nozioni passiamo ai seguenti esempi.

1.° *Qual capitale si richiede per acquistare lire 68,35 di rendita al prezzo di 94,70 ?*

Si dirà: se 5 lire si pagano 94,70, quanto debbono pagarsi lire 68,35?

Indicando con x il prezzo cercato, si avrà $x = \frac{94,70 \times 68,35}{5}$.

Si facilita l'operazione moltiplicando i due termini della frazione per 2, il che conduce alla seguente regola. *Per trovare il capitale corrispondente ad una data rendita iscritta, si moltiplica la rendita pel prezzo corrente raddoppiato, ed il prodotto si divide per 10.*

2.° *Qual rendita potrà aversi dal capitale di 3784 lire al corso del 102,45 ?*

Si troverà la rendita $x = \frac{3784 \times 5}{102,45}$; e moltiplicando per 2 i termini della frazione, ne risulterà la seguente regola pratica. *Per trovare la rendita iscritta corrispondente ad un dato capitale, si moltiplica il capitale per 10, ed il prodotto si divide pel capitale elementare raddoppiato.*

I calcoli relativi alla rendita del debito pubblico italiano sono facilissimi; perchè le cartelle al latore essendo multiple e summultiple di 50 lire; ed il prezzo corrente riferendosi a 5 lire, quello di 50 lire si ottiene moltiplicando il prezzo corrente per 10, il che si fa trasferendo la virgola di un posto verso dritta. Così p. e. se il prezzo in corso è di 98,63, 50 lire costano 986,30. Per comprare più di 50 lire, p. e. per comprarne 350 al corso di 92,85, si trova prima il prezzo di 50 lire, che è 928,50, e poi questo si moltiplica per 7, per essere 350 7 volte più grande di 50; e così si avrà il prezzo di 350 lire, che sarà 6499,50.

REGOLA DI PARTIZIONE.

296. La *regola di partizione* ha per oggetto di dividere un numero in parti proporzionali a più numeri dati.

Per dividere un numero in parti proporzionali ad altri

Digitized by Google

numeri dati si sommano questi numeri, e poi per trovare la parte corrispondente a ciascuno si stabilirà la proporzione: Somma dei numeri dati sta ad uno di essi, come il numero da dividersi sta a parte corrispondente.

Perchè è chiaro che se uno dei numeri dati è metà, terza parte, ec. della loro somma, anche la parte corrispondente deve essere metà, terza parte, ec. del numero da dividersi.

Così p. e. se il numero 50 volesse dividersi in tre parti proporzionali ai numeri 4, 5, 9; sommiamo questi numeri, e si ha per somma 18; ed indicando con x, y, z le parti di 50 corrispondenti a 4, 5, e 9; queste parti vengono date dalle proporzioni

$$18 : 4 :: 50 : x, \quad 18 : 5 :: 60 : y, \quad 18 : 9 :: 50 : z;$$

delle quali si ricava $x = \frac{4 \times 50}{18}$, $y = \frac{5 \times 50}{18}$, $z = \frac{9 \times 50}{18}$.

Si può osservare che le tre parti x, y, z, sommate fanno il numero da dividersi, perchè, dopo addizionate, il numeratore che ne risulta si decompone in due fattori, uno dei quali è il numero da dividersi, e l'altro è la somma 18 de' tre numeri dati; e siccome il denominatore è la stessa somma 18, questa somma svanisce perchè fattor comune dei termini della frazione; e si ha per risultato il numero da dividersi, che è 50.

Le operazioni possono semplificarsi se i numeri dati che sono proporzionali alle parti in cui si deve dividere la grandezza hanno fattori comuni, dividendoli per questi fattori, perchè il loro rapporto non cambia, e la grandezza potrà dividersi in parti proporzionali ai rispettivi quozienti che sono più semplici dei numeri dati.

297. Dalle espressioni di x, y, z, si vede che la regola per trovare le incognite può enunciarsi nel seguente modo, senza stabilire proporzioni.

La parte corrispondente ad uno dei numeri dati si ottiene moltiplicando questo numero pel rapporto costante del numero da dividersi alla somma dei numeri dati.

Questa regola è utile quando sono molte le parti in cui deve dividersi la data somma, perchè si evitano le molte divisioni, e se ne fa una

Digitized by Google

sola trovando con una sufficiente approssimazione il rapporto del numero da dividersi alla somma dei numeri dati.

Riguardo alla approssimazione del rapporto, ecco come conviene regolarsi. Se la cifra a sinistra del maggiore dei numeri dati rappresenta centinaia, come p. e. se questo numero fosse 530, il rapporto conviene che sia approssimato sino ai millesimi, affinchè l'errore della parte corrispondente a questo numero fosse minore di un' unità; perchè nel prodotto mancherebbe 530 moltiplicato per una quantità minore di 0,001, quindi l'errore sarà minore di 530×0, 001 ossia di 0,530, ossia di una unità. Da qui si vede che può tenersi come regola che, se il maggiore dei numeri dati avesse la cifra a sinistra esprimente centinaia, il rapporto succennato deve essere approssimato sino ai millesimi affinchè l'errore della parte corrispondente al detto numero fosse minore di una unità ; e se l' errore si volesse minore di un decimo, o di un centesimo, il rapporto suddetto deve essere approssimato rispettivamente sino ai diecimilesimi, o ai centomilesimi.

Se poi il maggiore dei numeri dati avesse la cifra a sinistra esprimente decine, l' approssimazione del detto rapporto deve avere una cifra decimale di meno; ma se esprimesse migliaia l' approssimazione deve avere una cifra decimale dippiù. E da qui è facile scorgere come debba regolarsi quando la cifra a sinistra del maggiore dei numeri dati fosse di ordine superiore alle migliaia.

Prob. I. *Debbasi ripartire a tre comuni una tassa di lire 30000 proporzionalmente al numero delle loro anime, componendosi il primo comune di 8025 anime, il secondo di 10500 anime, ed il terzo di 15360 anime : si domanda che parte spetta a ciascuno.*

Qui osserviamo che i numeri 8025, 10500, 15360 hanno per fattori comuni 2, e 5 ; perciò, sopprimendo questi fattori, la tassa dovrà ripartirsi proporzionatamente ai numeri 107, 140, 206.

Alcune volte la semplicità del rapporto fra la somma di dividersi e le sue parti fa subito risolvere la questione, come nel seguente.

Prob. II. *La polvere da cannone si compone di nitro, e di parti eguali di zolfo e carbone, ciascuna un sesto del nitro. Quanti chilogramm si richieggono di ognuna di queste tre cose per fare 100 chilogrammi della detta polvere ?*

Qui le parti in cui deve dividersi la somma 100 essendo proporzio-

nali a' numeri 6, 1, ed 1, si vede subito che il nitro è i $^{3}/_{4}$ dell' intera somma; perciò si avrà bisogno di 75 chilogrammi di nitro, 12 $^{1}/_{2}$ di solfo, e 12 $^{1}/_{2}$ di carbone.

REGOLA DI PARTIZIONE COMPOSTA.

298. La regola di partizione si dice *composta* allorchè le parti in cui deve ripartirsi la grandezza dipendono da altre grandezze, al variar delle quali esse variano in ragion diretta o inversa.

In tal caso ciascuna delle parti in cui deve dividersi la grandezza data è proporzionale al prodotto di quelle da cui dipende in ragion diretta, diviso pel prodotto di quelle da cui dipende in ragione inversa (n.° 284). In altri termini è proporzionale al prodotto delle grandezze da cui dipende in ragion diretta e delle inverse di quelle da cui dipende in ragione inversa.

E però, se supponiamo che ciascuna parte dipende da tre grandezze r, s, t, e varia in ragion diretta di r ed s, ed in ragione inversa di t, essa è proporzionale al prodotto $\frac{r\times s}{t}=r\times s\times\frac{1}{t}$.

Da ciò segue che se le parti sono tre, che denotiamo con x, y, z: indicando con r', s', t' i valori di r, s, t corrispondenti alla parte x, e con r'', s'', t'', i valori di r, s, t corrispondenti alla parte y, e con r''', s''', t''' i valori di r, s, t, corrispondenti alla parte z; si avrà che le parti x, y, z sono proporzionali ai prodotti $r'\times s'\times\frac{1}{t'}$, $r''\times s''\times\frac{1}{t''}$, $r'''\times s'''\times\frac{1}{t'''}$. Adunque bisognerà ripartire la grandezza proposta in parti proporzionali ai precedenti prodotti.

Passiamo adesso a' seguenti esempi.

PROB. III. *Tre socii intraprendono la traduzione di un' opera classica, impiegandovi tutti danaro e fatica. Il primo v' impiega 2000 lire,*

il secondo 1200, ed il terzo 3000. Il primo poi traduce 500 pagine dell' opera, il secondo 800, ed il terzo 300. Terminata l'opera, e vendute tutte le copie, trovano aver guadagnato 7000 lire. Si domanda come debba distribuirsi un tal guadagno fra i socii.

É chiaro che la rata di ciascun socio è in ragion diretta del danaro e della fatica che esso v' impiega; perciò il guadagno 7000 deve dividersi proporzionalmente ai nominati prodotti, ovvero a' numeri 50, 48, e 45 che ne risultano dopo aver soppresso i fattori comuni.

Se vi concorresse un quarto socio, ma col solo aiuto pecuniario di 3000 lire, senza occuparsi della traduzione dell' opera, allora converrebbe valutare in danaro la fatica di traduzione fatta da' tre primi socii, ed aggiungerla a' rispettivi capitali parziali da essi impiegati. Così, per esempio, supponendo che il lavoro di traduzione sia stimato 2500 lire, bisognerà dividere queste 2500 lire in parti proporzionali ai lavori rispettivi de' tre socii, cioè a' numeri 500, 800, e 300, ossia ai numeri 5, 8, e 3, il che fatto, si troverà che le fatiche di traduzione equivalgono rispettivamente a lire 781,25, a lire 1250, ed a lire 75. Aggiungendo poi questi numeri a' rispettivi capitali de' tre primi socii, i capitali diverranno 2781,25, 2450, e 3468,75. Adunque il problema si è ridotto a dividere il guadagno proporzionalmente ai capitali di lire 2781,25, 2450, 3468,75, e 3000 impiegati da' quattro socii.

Prob. IV. *Dovendosi riattare con molta fretta una fortezza, si convenuto che la totalità del prezzo sarà distribuita a quattro appaltatori in ragion diretta della quantità e della qualità del lavoro, ed in ragione inversa del tempo impiegato ad eseguirlo. Si domanda come regolarsi la distribuzione* (*).

Si dinotino con x, y, z, u, le rate de' quattro appaltatori. Sieno 10, 15, 9, 36 i tempi corrispondenti impiegati ad eseguire i rispettivi lavori; e sieno 20, 30, 15, 54 le rispettive quantità di lavoro; le qualità

(*) Questo problema l' abbiamo estratto dall' aritmetica del *sig. Amante*, per far notare che s' incorrerebbe in errore se, come egli ha fatto, si sostituissero a' tempi totali quelli in cui si sono eseguite le unità di lavoro. Difatti egli trova per risultati i numeri inesatti 250, 405, 175, 486, diversi da' nostri.

poi sono proporzionali ai prezzi dell' unità di lavoro, perciò se i prezzi dell' unità di lavoro di ciascun appaltatore sono rappresentati dai numeri 25, 27, 28, 24 le qualità saranno pr oporzionali a questi numeri. Adunque, per quel che si è stabilito di sopra, le rate x, y, z, u saranno rispettivamente proporzionali a' numeri

$$\frac{20\times25}{10},\quad \frac{30\times27}{15},\quad \frac{15\times28}{9},\quad \frac{54\times24}{36};$$

e supprimendo i fattori comuni, e riducendo al medesimo denominatore, verranno proporzionali a' numeratori 75, 81, 70, 54; perciò la totalità del prezzo deve dividersi in parti proporzionali a questi numeri.

PROB. V. *Il direttore di un collegio, per incoraggiare i giovanetti a ben condursi, promette loro un premio da distribuirsi in ragion diretta del profitto nello studio, e del contegno, ed in ragione inversa delle loro età. Si domanda come debba farsi la ripartizione.*

Supponiamo che sieno cinque i concorrenti a questo premio, ed i rispettivi profitti segnati in punti da' loro istruttori sieno 35, 26, 40, 30, 40; il loro contegno, segnato anche in punti, sia rappresentato da'numeri 5, 9, 8, 11, 13; e le loro età sieno di anni 14, 13, 15, 15, 16.

Dietro i principî appresi, il premio dovrà distribuirsi proporzionalmente a' numeri $\frac{35\times5}{14}$, $\frac{26\times9}{13}$, $\frac{40\times8}{15}$, $\frac{30\times11}{15}$, $\frac{40\times13}{16}$; e semplificando, e riducendo al medesimo denominatore, dovrà distribuirsi in parti proporzionali a' loro numeratori, e quindi a' numeri 75, 108, 128, 132, 195.

REGOLA DI SOCIETÀ

299. La *regola di Società* ha per oggetto di ripartire fra più socii il guadagno o la perdita avuta in un negozio, proporzionalmente ai capitali dai medesimi impiegati. Perciò essa non è che una regola di partizione.

La regola di società si dice *semplice* quando i capitali sono impiegati per lo stesso tempo, e si dice *composta* quando sono impiegati per tempi diversi.

Nella regola di società semplice per trovare la parte di un socio si sommano i capitali parziali, e poi si stabilisce la proporzione: Capitale totale sta a capitale parziale come il guadagno totale sta al guadagno parziale di quel socio.

Perchè è chiaro che se il capitale parziale è metà, terza parte, ec. del capitale totale, anche il guadagno parziale deve essere metà, terza parte, ec. del guadagno totale.

Prob. *Tre socii hanno impiegato i rispettivi capitali di **400** lire, **320** lire, e **240** lire, e dopo un certo tempo hanno guadagnato **280** lire: si dimanda che parte del guadagno tocca a ciascuno.*

Si addizionano i capitali parziali, e si avrà per somma il capitale totale di 960 lire; indi, per trovare i guadagni del 1.°, del 2°, e del 3° socio, si stabiliscono le proporzioni.
$960 : 400 :: 280 : x$, $960 : 320 :: 280 : y$, $960 : 240 :: 280 : z$;
dalle quali si ricava $x = 166{,}66$, $y = 93{,}33$, $z = 70$.

Si può fare la prova sommando i tre guadagni ottenuti, e la loro somma deve trovarsi eguale (n.° 296) al guadagno totale 280, se le operazioni sono state ben fatte. Ma facciamo notare che quando il quoziente si esprime in decimali, e la divisione si arresta ai 100^{mi}, senza che sia riuscita esatta, la somma dalle parti si troverà erronea per meno di 3 centesimi, di 4 centesimi, ec. secondo che le parti sono 3, 4, ec.; perchè ogni parte è erronea in difetto per meno di 0,01.

300. *Nella regola di società composta, per trovare il guadagno di un socio, si fanno i prodotti dei capitali parziali per i rispettivi tempi, e poi si divide il guadagno totale proporzionalmente a questi prodotti.*

Ciò perchè il guadagno di ciascun socio è proporzionale al prodotto del capitale pel rispettivo tempo. Difatti, è chiaro che se uno di questi fattori diviene 2, 3, ec. volte maggiore, anche il prodotto diviene altrettante volte maggiore; perchè si suppone che il guadagno è proporzionale al capitale impiegato ed al tempo in cui si è impiegato.

Digitized by Google

Facciamo osservare che le questioni di società composta, sono casi particolari della regola di partizione composta; difatti la rata di ciascun socio varia in ragion diretta del capitale e del tempo corrispondente, e perciò le parti del guadagno sono proporzionali ai prodotti dei capitali per i rispettivi tempi.

Prob. *Tre socii mettono a negozio: il primo un capitale di* **580** *lire per* **2** *anni, il secondo un capitale di* **500** *lire per* **16** *mesi, il terzo un capitale di* **800** *lire per un anno; il guadagno totale è di* **965** *lire. Si domanda la parte del guadagno che tocca a ciascuno.*

Si faranno i prodotti dei capitali per i rispettivi tempi, e questi sono 580×24, 500×16, 800×12; indi il guadagno 965 si divide proporzionalmente a questi prodotti, e siccome essi hanno per fattori comuni 10, 8, e 2, questi fattori si possono sopprimere, perchè il rapporto fra i prodotti non cambia; e così il guadagno totale deve dividersi proporzionalmente ai numeri 87,50, e 60. Perciò, indicando con x, y, z, le rispettive parti del primo, secondo, e terzo socio, esse si otterranno dalle proporzioni.

$197 : 87 :: 965 : x$, $197 : 50 :: 965 : y$, $197 : 60 :: 965 : z$;
da cui si ricava $x=426,16$, $y=244,92$, $z=293,90$.

301. Si può dare un' altra ragione della regola di società composta. Si osserva che in un tempo 2, 3, ec. volte minore, vi bisogna un capitale 2, 3, ec. volte maggiore per avere lo stesso guadagno; vale a dire che se il tempo si divide per un numero, bisogna moltiplicare il capitale per lo stesso numero per avere il medesimo guadagno nel nuovo tempo che si ottiene per quoziente. Da ciò segue che quando i tempi sono diversi si possono ridurre all' unità, dividendoli per sé stessi, e si avranno gli stessi guadagni di prima, ma non già dai capitali primitivi, ma da capitali eguali ai primitivi moltiplicati per i rispettivi tempi. Si moltiplicheranno dunque i capitali per i rispettivi tempi, ed i prodotti che ne nascono saranno quei capitali che impiegati per lo stesso tempo eguale all' unità, daranno gli stessi guadagni cercati. Quindi il problema si riduce ad un altro di società semplice, in cui i capitali sono i suddetti prodotti, e sono impiegati pel medesimo tempo.

Digitized by Google

Regola delle mescolanze, o di alligazione.

302. La *regola di alligazione* ha per oggetto di risolvere i problemi relativi alle mescolanze dei liquidi o di altre materie (*).

Noi qui tratteremo le quistioni che possono risolversi con l' aritmetica, essendovene altre affini che sono proprie del dominio dell' algebra.

Prob. 1. *Si vogliono mescolare 16 barili di vino del prezzo di 10 lire il barile con 15 di quello di 12 lire il barile, e con 28 di quello di 9 lire il barile. Si domanda qual sia il prezzo di un barile del vino mescolato.*

bar.	prezzi corrispondenti
16	$10 \times 16 = 160$
15	$12 \times 15 = 180$
28	$9 \times 28 = 252$
59	592

Scrivendo i dati come si vede qui affianco, osserviamo che il prezzo di un barile del primo vino essendo 10 lire, il prezzo di quello di 16 barili sarà lire 10×16 ossia 160 lire. Similmente si scorge che il prezzo dei 15 barili del secondo vino sarà 12×15, ossia 180 lire, e che il prezzo de' 28 barili del terzo vino sarà 9×28, ossia 252 lire.

Sommando ora tutti i barili de' vini mescolati, la loro somma sarà 59; e sommando pure i loro prezzi, si avrà che il prezzo totale de' 59 barili è 592 lire. Quindi si vede che, se 59 barili costano 592 lire, il prezzo della 59^{ma} parte, cioè di un barile, sarà la 59^{ma} parte del prezzo totale, cioè si ottiene dividendo 592 per 59; eseguendo la divisione si troverà il prezzo di un barile eguale a lire 10, 03.

Adunque: *Per ottenere il prezzo dell'unità della mescolanza bisogna dividere il prezzo di tutto il mescuglio per il numero delle unità che esso contiene.*

(*) Si dice regola di *alligazione* per le molte applicazioni che se ne fanno a' problemi relativi alle *leghe*; chiamandosi *lega* il mescuglio che nasce dal fondere insieme più metalli.

303. L'ottone è una lega di rame e zinco nel rapporto di 2 a 1 : ma nelle 100 parti che lo compongono si fanno entrare 64 parti di rame, 33 di zinco, $1\,^1/_2$ di stagno, ed $1\,^1/_2$ di piombo; servendo lo stagno a dare maggior durezza all'ottone, ed il piombo a renderlo più facile a lavorarsi. Ciò posto :

Prob. II. *Si domanda quanto costa un chilogrammo di ottone formato di rame, zinco, stagno, e piombo con le proporzioni precedenti, dovendosi pagare il rame a lire 2, 65 il chilogrammo, lo stagno a lire 2, 90, lo zinco a lire 0, 75, ed il piombo a lire 0, 60.*

Risposta: a lire 2 il chilogrammo.

Il bronzo è una lega di rame e stagno in diverse proporzioni secondo i diversi usi a cui serve. Quello delle campane si compone da 78 parti di rame e 22 di stagno. Quello de' cannoni si compone da 100 parti, di cui 86 di rame ed 11 di stagno, potendosi porre nelle 100 parti anche 3 centesimi di zinco ed una di ferro. Quello delle medaglie si compone similmente, potendosi lo stagno diminuire sino a 6 centesimi, aumentando il rame sino a 92, o 93 centesimi. Quello delle statue si forma da parti 91,40 di rame, 1,70 di stagno, 5,53 di zinco, ed 1,37 di piombo.

Ciò premesso, applichiamo a questa ultima lega il seguente

Prob. III. *Si deve formare una statua per la quale bisognano 220 chilogrammi di bronzo composto di rame, stagno, zinco, e piombo con le proporzioni anzidette, essendo i prezzi de' cennati metalli gli stessi che nel problema precedente; si domanda che quantità si richiede di ciascuno de' medesimi metalli, ed a quanto ascende il prezzo dei 220 chilogrammi di bronzo da fondersi.*

Risposta : chilogrammi 201,08 di rame, 3, 74 di stagno, 12, 166 di zinco, e 3, 014 di piombo ; il prezzo poi dei 220 chilogrammi di bronzo è lire 534, 6409.

304. Passiamo ora alle quistioni in cui si vuole conoscere in che rapporto debbono mescolarsi due sostanze di diverso valore, affinchè il miscuglio acquisti un valore medio dato.

Ecco la regola per risolvere i problemi di questa natura. *La sostanza di maggior prezzo sta a quella di minor prezzo, come l'eccesso del prezzo medio sul minore sta all'eccesso del prezzo maggiore sul medio.*

Prob. IV. *In quale rapporto bisogna mescolare due qualità di vino, una del prezzo di 25 lire il barile, e l'altra del prezzo di 16 lire il barile, per formare 100 barili del prezzo medio di 20 lire il barile.*

È chiaro che sul prezzo di x barili di vino di 25 lire il barile che vo-

gliono vendersi a 20 lire, cioè 5 lire di meno, si avranno di meno lire $5 \times x$; e sul prezzo di y barili di vino di 16 lire il barile che vogliono vendersi a 20 lire, cioè 4 lire dippiù, si avranno dippiù lire $4 \times x$. Perciò, se quello che si ha dippiù eguagliasse quello che si ha di meno, si otterrebbe il prezzo degli $x+y$ barili venduti a 20 lire, come se si fossero venduti per i prezzi di 25 e di 16 lire; per il che si richiede che sia $5 \times x = 4 \times y$; perciò i fattori 5 ed x possono prendersi come termini estremi di una proporzione, e 4 ed y come termini medii, e viceversa. Da quì si ricava la regola data, cioè che, la quantità di maggior prezzo sta a quella di minor prezzo, come la differenza fra il prezzo medio ed il minore sta a quella fra il maggiore ed il medio.

Dunque nell'esempio dato bisogna dividere 100 in due parti x ed y proporzionali ai numeri 4 e 5; perciò si hanno le due proporzioni

$$9 : 4 :: 100 : x \qquad 9 : 5 :: 100 : y,$$

da cui si ricava $\quad x = 44\,4/_9$, ed $\quad y = 55\,5/_9$.

Se la grandezza da dividersi fosse l'unità, come ordinariamente avviene, e che nel nostro esempio sarebbe un barile, la quantità di maggior prezzo sarebbe $4/_9$ di un barile, e la quantità di minor prezzo sarebbe i $5/_9$ del barile.

Si può notare che delle due parti viene minore quella il cui prezzo più si discosta dal prezzo medio.

Prob. V. *Qual quantità d'acqua deve mescolarsi in 24 barili di vino di 22 lire il barile, affinchè il prezzo si abbassi a 15 lire il barile?*

Quì è chiaro che bisogna considerare come se il prezzo dell'acqua fosse di *zero* lire il barile; quindi il prezzo maggiore è di 22 lire il barile, il medio di 15, ed il minore di *zero* lire; e però possiamo applicare a questo problema lo stesso ragionamento del problema precedente, e si troverà che l'acqua deve mescolarsi col vino di 22 lire il barile nel rapporto di 7 : 15, e siccome quì la quantità di maggior prezzo è data, ed è 24 barili, la sola incognita è la quantità di minor prezzo che indichiamo con x; laonde la quantità di acqua da mescolarsi nei 24 barili si ricava dalla proporzione $24 : x :: 15 : 7$, e risulta eguale a $11\,^{1}/_{5}$.

Prob. VI. *In qual rapporto debbono mescolarsi due masse di argento, una del titolo di 0,853, e l'altra del titolo di 0,923, per farne una terza del titolo di 0,900?*

La regola per risolvere questo problema è quella stessa data per i due precedenti, cioè massa di *maggior* titolo sta a quella di *minor* titolo, come l'eccesso del titolo medio sul minore sta all'eccesso del titolo maggiore sul medio. È però, indicando con x ed y le rispettive

Digitized by Google

masse di maggiore e di minor titolo, deve aversi la proporzione $x : y :: 67 : 25$, cioè un chilogrammo deve dividersi in parti proporzionali ai numeri 67, e 25. Ciò fatto; la parte x corrispondente a 67 viene eguale a $^{26}/_{92}$ di chilogrammo, e la parte y corrispondente a 25 viene eguale a $^{67}/_{92}$ di chilogrammo.

La dimostrazione della data regola fatta nel problema IV non è facilmente applicabile al presente problema; crediamo perciò utile replicarla adattandola a questo esempio.

Essendo 67 millesimi l'eccesso dell'oro puro di titolo medio sul minore, e 25 millesimi l'eccesso dell'oro puro del titolo maggiore sul medio, si dirà: Se un'unità di peso, p. e. un grammo di oro del maggior titolo, contiene 25 millesimi di più di oro puro di quanto ne contiene un grammo del titolo medio, x grammi di oro del maggior titolo ne contengono millesimi $25 \times x$ di più di x grammi di oro del titolo medio. Per la stessa ragione y grammi di oro del minor titolo contengono $67 \times y$ millesimi di oro puro di meno di quanti ne contengono y grammi del titolo medio. Perciò, se le masse x ed y fossero tali che ciò contiene dippiù la prima pareggiasse ciò che contiene di meno la seconda, le due masse x ed y unite conterrebbero giusto tanto di oro puro quanto ne deve contenere la massa $x+y$ del titolo medio. Dunque la massa $x+y$ sarà del titolo medio se le due parti x ed y sono tali che $0{,}25 \times x = 0{,}67 \times y$, cioè se $x : y :: 67 : 25$. Ed ecco dimostrato che *la massa* x *di maggior titolo sta alla massa* y *di minor titolo, come l'eccesso del titolo medio sul minore sta all'eccesso del titolo maggiore sul medio.*

PROB. VII. *Che quantità di rame bisogna porre in 20 libbre d'oro del titolo di 0, 995, affinchè si abbassi il titolo a 0,750, ossia a 18 carati?*

Qui è manifesto che bisogna considerare il rame come il metallo il cui titolo è *zero*; perciò il titolo maggiore è 0, 995, il medio è 0, 750, ed il minore è *zero*. Applicando a questi dati il ragionamento del problema precedente, si avrà che l'oro deve mescolarsi al rame nel rapporto di 750 : 246, ossia di 125 : 41; e perciò, indicando con x il rame, esso vien dato dalla proporzione $20 : x :: 125 : 41$, e viene eguale a libbre 6 $^{14}/_{25}$.

REGOLA CONGIUNTA

305. Allorchè si hanno più grandezze, e si conosce che il valore di un certo numero di unità della prima equivale a quello di un certo numero di unità della seconda, ed il va-

Digitized by Google

lore di un certo numero di unità della seconda, equivale a quello di un certo numero di unità della terza, e così di seguito sino all'ultima grandezza; la regola che insegna a trovare il valore di un'unità della prima grandezza rispetto a quello di un' unità dell' ultima, si dice *regola congiunta.*

Essa quando si applica alle monete si dice regola dei *cambi*.

Per risolvere i problemi di regola congiunta si scrivono le relazioni, ossia le eguaglianze che concatenano l'una grandezza all' altra, in modo che il primo membro della prima eguaglianza contenga la grandezza il cui valore si vuol conoscere rispetto a quello di un' altra grandezza la quale deve essere contenuta nel secondo membro dell' ultima eguaglianza; poi si divide il prodotto dei numeri dei secondi membri pel prodotto dei numeri dei primi membri, ed il quoziente esprime il rapporto fra la prima e l' ultima grandezza.

Prob. 1.° *Si sa che, a un dipresso, 71* yards *inglesi equivalgono a 200* piedi *di Parigi, e che 157 piedi di Parigi equivalgono a 51* metri, *e che 50 metri equivalgono a 189* palmi *napolitani. Si domanda il valore del* yards *rispetto al* palmo.

Scriviamo le date relazioni come qui affianco; indi dividiamo il prodotto dei numeri che sono nei secondi membri pel prodotto dei numeri che sono nei primi membri, e si avrà

$$71\,yar. = 200\,pie.$$
$$157\,pie. = 51\,met.$$
$$50\,met. = 189\,pal.$$

$$1\,yards = \frac{200 \times 51 \times 189}{71 \times 157 \times 50}\,di\,pal. = pal.\ 3{,}45.$$

Difatti, il prodotto dei primi membri essendo eguale a quello dei secondi membri, se in questa eguaglianza di prodotti si sopprimono i fattori comuni, che trovansi alternativamente nei secondi e primi membri delle eguaglianze date, e poi la stessa eguaglianza si divide pel prodotto dei numeri che sono nel primo membro, si ottiene il valore cercato.

Prob. II. *Un negoziante di Napoli vuole cambiare salami con vino di Marsala, e conosce che 8* rotoli *di salami equival-*

Digitized by Google

gono a 16 lire, *e che 20 lire equivalgono a 2* canne *di seta di Catania, e che 3 canne di detta seta equivalgono a 60* caraffe *di vino di Marsala; da queste relazioni si vuol dedurre il valore di un rotolo di salami rispetto al valore di una caraffa di vino di Marsala.*

Risposta: $1\ rot. = \frac{16\times2\times60}{8\times20\times3}$ *di caraffa* $= 4$ *caraffe.*

Prob. *III. Si conosce che* ducati *432 di Svezia equivalgono a 1000* ristalleri *di Danimarca, e che 3 ristalleri equivalgono a 4* talleri *di Prussia, e che 100 talleri equivalgono a* ducati *87,40 napolitani. Si domanda quanto è il ducato di Svezia rispetto al napolitano.*

Risposta: $1\ duc.di\ Svez. = duc.nap. \frac{1000\times4\times87,40}{432\times3\times100} = 2,70.$

La regola di *arbitraggio* non è che un' applicazione della regola congiunta; e dicesi così, perchè essa giudica del valore di una moneta o merce di un luogo, rispetto al valore di un' altra moneta o merce di un altro luogo, mediante le relazioni che le due monete o merci hanno con quelle di altri luoghi diversi dai due di cui si tratta.

306. Avendo parlato della *regola dei cambi*, crediamo opportuno spiegare che cosa vuol significare la parola *cambio*, che si adopera nei *listini di Borsa*.

Per meglio dichiarare la cosa mettiamo qui appresso un pezzo del listino della Borsa di Napoli che è formato da una prima colonna in cui sono scritte le *Piazze* alle quali il cambio si riferisce, e da una seconda colonna in testa della quale si trova la lettera *G* ovvero *U*, perchè in essa sono scritti i giorni di uso, che si prendono di dilazione per fare il pagamento, e che si riferiscono alle due piazze ove il pagamento si effettua; e da una terza e quarta colonna nelle quale è scritto, in lire e centesimi, il corso del cambio relativo a quel giorno in cui il listino è formato. Abbiamo messo il segno — avanti a quei cambi che sono *sotto alla pari*, come si è supposto esser quelli di Berlino, Londra, Parigi, e Vienna. Affianco al listino abbiamo aggiunto il valore al pari dell' unità monetaria delle controscritte piazze rispetto alla lira italiana.

Digitized by Google

Listino dei Cambii				*Valore al pari delle unità monetarie delle controscritte Piazze, rispetto alla lira italiana.*
Piazze	*G*	*lir.*	*cent.*	
Amburgo	90	1	95	1 *Marco bianco* . . . . . = lire 1,8727
Amsterdam	60	2	20	1 *Fiorino Olandese* . . = » 2,0999
Berlino	80	3	65	1 *Tallero Prussiano* . = » 3,7037
Costantinopoli	90	0	25	1 *Piastra Turca* . . . = » 0,2218
Francoforte	90	2	18	1 *Fiorino*. (del sud) . = » 2,1164
Lisbona	90	5	65	1 *Milres* . . . . = » 5,6000
Londra	90	25	05	1 *Lira sterlina* . . . . = » 25,2200
Madrid	30	5	30	1 *Piastra Spagnola* . = » 5,2682
Parigi	80	0	99	1 *Franco* . . . . = » 1,0000
Pietroburgo	90	4	05	1 *Rublo (argento)* . . . = » 3,9988
Vienna	70	2	40	1 *Fiorino nuovo* . . . . = » 2,4691

Nel corso del cambio segnato nel listino di Borsa di una Piazza si ragguaglia una quantità di moneta di questa Piazza ad una quantità fissa di moneta di un'altra Piazza a cui il cambio si riferisce ; questa quantità fissa è l'unità di moneta o cento unità: p. e. nel corso del cambio segnato in un dato giorno in Napoli su Londra, viene stabilito a quante lire italiane equivale in quel giorno una lira sterlina, unità di moneta di Londra. Da qui si vede che nel prezzo del cambio vi sono due termini; uno è quello che esprime la quantità di moneta della Piazza ove si stabilisce il cambio, e l'altro è quello che esprime la quantità di moneta fissa della Piazza a cui si riferisce il cambio; il primo si dice *termine variabile o incerto*, ed il secondo si dice *termine fisso* o *certo*. Così supponendo che il corso del cambio segnato in un dato giorno nella Borsa di Napoli su Londra sia 25,05 , il termine variabile è 25,05, ed il termine fisso è una lira sterlina unità di moneta di Londra. E siccome una lira sterlina eguaglia *alla pari* lire italiane 25,22, il corso 25,05 del cambio vuol dire che colui il quale volesse far pagar danaro in Londra, dandone l'incarico in quel giorno, (da pagarsi secondo l'uso dopo 90 giorni in Londra, o anche prima soddisfacendo lo sconto) invece di pagare lire 25,22 per ogni lira sterlina, pagherebbe lire 25,05, e perciò godrebbe di un aggio nel cambio. Il cambio si dice *al pari* quando è uguale al valore al pari fra le quantità di monete a cui si riferisce. Così se il cambio di Napoli su Londra fosse lire 25,22, sarebbe al pari, perchè 25,22 è il valore al pari fra la lira sterlina e la lira italiana. In tal caso non ci è aggio nè disaggio nel mandar danaro dall'una all'altra città. Se poi il cambio su Londra è di lire 25,30, allora si dice *sopra al pari* ; e se è di 25,05, si dice essere *sotto al pari*.

Passiamo ora a spiegare il mezzo che si tiene perchè un negoziante Tizio di Napoli possa fare un pagamento a Caio in Marsiglia per mezzo di cambiali. Tizio si reca alla Borsa di Napoli, e manifesta ad un *agente di cambio* di voler fare un pagamento di 5000 lire a Caio in Marsiglia; l'agente di cambio, il quale, per richieste avute da altre persone che debbono ricevere danaro da Marsiglia, conosce di esservi Pietro in Napoli che deve esigere 12000 lire da Paolo negoziante di Marsiglia, offre a Tizio il mezzo di poter fare il pagamento in Marsiglia, ed a Pietro il mezzo di esigere in Napoli 5000 lire del suo danaro nel seguente modo. Pietro trae una cambiale a carico di Paolo, ed a favore di Tizio, in cui dice a Paolo di pagare 5000 lire all' ordine di Tizio, che sono parte delle 12000 lire le quali deve ricevere da Paolo. Tizio poi gira la cambiale a Caio, affinchè ritiri da Paolo in Marsiglia le 5000 lire. Tizio intanto che dà in Napoli a Pietro le 5000 lire per farle pagare in Marsiglia, e Pietro che riceve questo danaro debbono adattarsi al corso del cambio della giornata per Marsiglia, che nel listino supponiamo trovarsi segnato 0,99; dunque Tizio vi ha un guadagno, perchè invece di pagare una lira paga 99 centesimi, e quindi per 5000 lire deve pagarne solo 4950; e perciò vi ha 50 lire di guadagno. Avrebbe potuto succedere che invece di guadagno si avesse avuto perdita; e ciò sarebbe avvenuto se il cambio invece di 0,99, fosse stato p.e. 1,03.

Intanto Pietro che trae la cambiale, e Tizio che l' ha avuta in suo favore debbono adattarsi anche all' uso dei giorni, cioè, che il pagamento in Marsiglia si farà dopo 70 giorni; perciò nel listino di Borsa si veggono notati i giorni. Se poi il pagamento si volesse con anticipazione, colui che lo anticipa si prende lo sconto, che fra le piazze di Napoli e Marsiglia si usa al 4 °/₀.

Il corso del cambio aumenta allorchè nella Piazza dove si fissa il cambio la quantità di danaro di coloro che vogliono l' agevolazione di fare il pagamento nell' altra piazza è maggiore della quantità di danaro di coloro che vogliono essere agevolati ad avere il pagamento nella prima piazza, cioè quando la prima piazza è in *debito* rispetto alla seconda. Esso poi diminuisce quando avviene il contrario, cioè quando la prima piazza è *creditrice* della seconda. Si capisce poi che il cambio è più grande fra quelle piazze che hanno poco commercio fra loro, e la cui reciproca distanza ha bisogno di un viaggio dispendioso e rischioso.

Digitized by Google

CAP. XII.

Estrazione delle radici quadrate e cubiche.

COMPOSIZIONE DEL QUADRATO DI UN NUMERO.

307. *Se un numero è diviso in due parti, il quadrato di tutto il numero è uguale al quadrato della prima parte, più il doppio prodotto della prima per la seconda, più il quadrato della seconda.*

Sia p. e. il numero 37 diviso nelle due parti 30 e 7: dico che

$$37^2 = 30^2 + 2\times30\times7 + 7^2.$$

In effetti, per fare il quadrato bisogna moltiplicare $30+7$ per $30+7$, ma ciò equivale a moltiplicare $30+7$ prima per 30 e poi per 7; quindi si avrà

$$(30+7)^2 = (30+7)\times30 + (30+7)\times7 = 30^2 + 7\times30 + 30\times7 + 7^2$$

ma $7\times30 + 30\times7$ equivale a 2 volte il prodotto di 30 per 7; quindi si avrà che $(30+7)^2 = 30^2 + 2\times30\times7 + 7^2$; cioè il quadrato del numero 37 diviso nelle due parti 30 e 7 si compone del quadrato di 30, del doppio prodotto di 30 per 7, e del quadrato 7.

Lo stesso ragionamento vale per qualunque altro numero che sia diviso in due parti.

Da qui si desume che se un numero contiene decine ed unità, il suo quadrato si compone dal quadrato delle decine, dal doppio prodotto delle decine per le unità, e dal quadrato delle unità.

308. Facciamo osservare che i numeri quadrati perfetti sono assai rari rispetto a quelli non quadrati esatti. Così p. e. 25 essendo il quadrato di 5, e 36 il quadrato di 6, fra 25 e 36 si trovano dieci numeri non quadrati perfetti. A misura poi che due numeri interi consecutivi sono di più in più grandi, cresce la differenza fra i loro quadrati sino a divenir

grandissima, ed anche maggiore di qualunque numero dato. È facile convincersi di questa verità dando un'occhiata ai quadrati de' numeri semplici, che abbiamo scritti qui appresso in corrispondenza delle loro radici,

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81;

ove si vede che le differenze fra i quadrati formano la serie de' numeri dispari a contar da 3. Questa legge è vera per tutt' i numeri interi. Difatti, indicando con a un qualunque numero intero, il quadrato di $a+1$ essendo a^2+2a+1, esso differisce dal quadrato di a per $2a+1$: cioè, il quadrato di un numero intero differisce dal quadrato del numero intero immediatamente inferiore pel doppio di questo numero accresciuto dell'unità; perciò questa differenza è un numero dispari. Per la medesima ragione il quadrato di $a+2$ differisce da quello di $a+1$ per $2(a+1)+1$, ossia per $2a+2+1$, che è il numero dispari immediatamente maggiore di $2a+1$.

309. Alle volte si può conoscere che un numero non è quadrato esatto, senza estrarre la radice: ed ecco come.

Un numero non è quadrato esatto quando la cifra a dritta è 2, 3, 7, 8, ovvero termina un numero dispari di zeri.

In effetti, la cifra a dritta di un quadrato deriva dal quadrato della cifra a dritta della radice; e siccome i quadrati dei numeri di una cifra non terminano mai con le cifre 2, 3, 7, 8, perciò un numero che termina con queste cifre non è quadrato esatto; e quando termina con un numero impari di zeri nè anche è quadrato esatto, perchè i zeri a dritta del quadrato sono il doppio di quelli della radice.

ESTRAZIONE DELLA RADICE QUADRATA DA' NUMERI INTERI

310. Dovendosi estrarre la radice quadrata da un numero intero supporremo primieramente che esso abbia tre o quattro cifre, e sia, per esempio, il numero 5821.

Or poichè la radice quadrata di 100 ha due cifre, il numero proposto essendo maggiore di 100, la sua radice quadrata avrà almeno due cifre, cioè conterrà decine ed unità; dunque nel proposto numero è contenuto il quadrato delle decine della radice, il doppio prodotto delle decine per le unità, ed il quadrato delle unità; ma il quadrato delle decine non ha cifre significative di ordine inferiore alle centinaia, perchè tiene due zeri a dritta, perciò se distacchiamo due cifre dalla dritta del numero proposto, nel numero 48 a sinistra sarà contenuto il quadrato delle decine della radice; quindi estraendo la radice quadrata dal massimo quadrato contenuto in 58, che è 49, si avranno le decine della radice che sono 7; difatti, non possono essere più di 7, perchè se fossero 8, il quadrato di 8 decine, che è 64 centinaia, non è contenuto nelle 58 centinaia del numero proposto.

Scriviamo dunque a dritta del numero proposto le 7 decine della radice, intavolando l'operazione come qui appresso.

58,21	76
49	146
92,1	6
876	
45	

Ora se togliamo da 58 il quadrato delle 7 decine, che è 49, ed a dritta del resto 9 abbassiamo le due cifre che avevamo separate dalla dritta del numero proposto, è chiaro che nel numero 921 che ne risulta deve esser contenuto il prodotto del doppio delle decine della radice per la cifra delle unità, ed il quadrato delle unità; ma il doppio prodotto delle decine per le unità non ha cifre significative di ordine inferiore alle decine, perchè tiene un zero a dritta, perciò distaccando una cifra a dritta del numero 921, nel numero 92 a sinistra sarà contenuto il prodotto del doppio delle decine della radice per la cifra delle unità, laonde dividendo 92 per il doppio delle decine trovate, che è 44, avremo la cifra delle unità; eseguendo la divisione troviamo che 6 è la cifra delle unità, onde si deduce che 76 è la radice cercata.

Or se facciamo il quadrato delle 6 unità, ed il prodotto del doppio delle decine per la cifra delle unità, e togliamo questo quadrato e questo prodotto dal numero 921, finiremo così di togliere dal numero proposto il quadrato della sua radice 76, perchè prima ne abbiamo tolto il quadrato delle 7 decine, ed ora togliamo dal resto 921 il doppio prodotto delle decine per le unità ed il quadrato delle unità. Questa moltiplicazione e sottrazione si fa scrivendo la cifra 6 a dritta di 14, e che è il doppio delle decine, e poi si moltiplica 146 per 6, ed il prodotto si toglie da 921; e poichè si ottiene per resto 45, ne conchiudiamo che 5821 non è quadrato perfetto, e quindi 76 è la radice del massimo quadrato contenuto 5821, e 5821 supera questo massimo quadrato di 45.

311. Sia per secondo esempio ad estrarsi la radice quadrata da un numero di tre cifre, p. e. dal numero 729.

Cominciamo dall'osservare che il numero proposto essendo maggiore di 100, la sua radice deve contenere decine ed unità; perciò nel proposto numero sarà contenuto il quadrato delle decine della radice, il doppio prodotto delle decine per le unità, ed il quadrato delle unità; ma perchè il quadrato delle decine è contenuto nel numero che rappresenta le centinaia, se distacchiamo le due cifre a dritta del numero 79, ed estragghiamo la radice quadrata dal numero 7 che sta a sinistra, si avranno così le decine della radice che sono chiaramente 2. Poi si toglierà il quadrato di 2 da 7, ed a dritta del resto 3 si abbasserà la coppia delle cifre che eransi distaccate, si avrà così il numero 329 in cui sarà contenuto il prodotto del doppio delle decine della radice per la cifra delle unità, ed il quadrato delle unità; perciò distaccando dalla dritta del detto numero la cifra 9 delle unità, e dividendo il numero 32 a sinistra pel doppio delle decine, che è 4, si avrà la cifra delle unità.

7,29	27
4	47
32,9	7
32,9	
00 0	

Ma qui conviene osservare che sebbene 32 diviso per 4

dà per quoziente 8, pure la cifra 8 non si può prendere per cifra delle unità, perchè essa è troppo grande, dovendo la medesima esser tale che moltiplicata per sè stessa è per 4, che è il doppio delle decine, ne risulti un prodotto che non sia maggiore di 329: in questo esempio bisogna diminuirla di una sola unità, ond' è che 7 sarà la cercata cifra delle unità. Or poichè moltiplicando 47 per 7, e togliendo il prodotto da 329 non si ottiene alcun resto, ne conchiuderemo che 27 è la radice quadrata esatta dal numero 729.

312. *Avvertimento.* Allorquando si fa la divisione per trovare la cifra delle unità, non vi è bisogno di moltiplicare questa cifra per sè stessa e pel doppio della radice affin di assicurarsi se essa sia la giusta cifra. Così nell'esempio precedente essendosi diviso 32 per 4, si è avuto per quoziente 8 che si è scritto a dritta di 4 per poi moltiplicare 48 per 8 e vedere se il prodotto risultava maggiore eguale o minore di 329, affin di diminuire 8 di un' unità se risultava maggiore; ma senza fare questa moltiplicazione possiamo conoscere se 8 debba diminuirsi di un'unità; difatti, è facile scorgere che il numero 329 può considerarsi come dividendo, 48 come divisore, ed 8 come quoziente; quindi per assicurarsi che la cifra 8 sia giusta possiamo immaginarla scritta a dritta di 4, e nel fare la divisione si dirà: 4 in 32 è contenuto 8 volte senz' avanzo, ma 8 non è contenuto 8 volte in 9; dunque la cifra 8 è troppo grande, perciò essa si diminuisce di un' unità e si prende 7, e si dirà: 4 in 32 è contenuto 7 volte con l' avanzo 4 che posto avanti a 9 fa 49; il 7 in 49 è pure contenuto 7 volte, dunque 7 è la giusta cifra delle unità.

313. Passiamo ora ad estrarre la radice quadrata da un numero che abbia più di quattro cifre, ma non più di sei, e sia il numero 763498.

Cominciamo dall' osservare che il numero proposto essendo maggiore di 100, la sua radice quadrata contiene decine

ed unità, e però nel proposto numero è contenuto il quadrato delle decine della radice, il doppio prodotto delle decine per le unità, ed il quadrato delle unità; ma il quadrato delle decine non ha cifre significative di ordine inferiore alle centinaia quindi distaccando due cifre dalla dritta del numero proposto, nel numero 7634 a sinistra sarà contenuto il quadrato delle decine della radice; dunque per trovare queste decine bisogna estrarre la radice quadrata dal numero 7634; ma questo numero essendo di quattro cifre sappiamo estrarre la sua radice quadrata, il che effettuandosi (come si vede qui a fianco ove le sottrazioni si sono fatte a memoria come si costuma nelle divisione, e perciò si sono scritti i soli resti) troveremo che essa è 87. Or poichè tolto il quadrato delle 87 decine della radice da 7634 vi restano 63 decine, se abbassiamo a dritta di questo resto l'altra coppia di cifre, nel numero 6598 che ne risulta sarà contenuto il doppio prodotto delle decine per la cifra delle unità, ed il quadrato delle unità; ma perchè il prodotto del doppio delle decine per la cifra delle unità non ha cifre significative di ordine inferiore alle decine, se distacchiamo una cifra a dritta del numero 6598, nel numero 659 a sinistra sarà contenuto il prodotto del doppio delle decine per la cifra delle unità, adunque dividendo questo numero pel doppio delle decine trovate che è 174 (e che si ottiene sommando 167 con la cifra 7 che sta al di sotto) il quoziente 3 che ne risulta sarà la cifra delle unità.

76,34,98	873
12 3,4	167
65 9,8	7
13 69	1743
	3

Or se moltiplichiamo 1743 per 3, cioè se facciamo il quadrato delle 3 unità ed il prodotto del doppio delle decine per le unità, e togliamo il risultamento che si ottiene dal numero 6598, finiremo così di togliere dal numero proposto il quadrato della sua radice 873; perchè prima ne abbiamo tolto il quadrato delle 87 decine, ed ora togliamo dal resto 6598

il doppio prodotto delle decine per le unità, ed il quadrato delle unità. E poichè si ottiene per resto 1369, ne conchiuderemo che il numero 763498 non è quadrato perfetto; quindi 873 è la radice del massimo quadrato contenuto in 763498.

314. *Avvertimento*. Se avvenisse che dopo essersi abbassata a dritta di un resto la seguente coppia di cifre del numero proposto, e dopo essersi distaccata la cifra a dritta del numero che n'emerge, il numero a sinistra di questa cifra il quale deve dividersi pel doppio della radice trovata, risultasse minore di questo doppio, allora la seguente cifra della radice sarà zero; perciò si porrà prima un zero a dritta della radice trovata, e poi si proseguirà l'operazione abbassando la seguente coppia di cifre del numero proposto.

Così p. e. dovendosi estrarre la radice quadrata dal numero 95481; dopo essersi abbassata a dritta del primo resto zero la coppia di cifre che forma il numero 54, e dopo distaccata la cifra a dritta, il numero 5 a sinistra il quale deve dividersi per 6, cioè pel doppio della radice, si trova che è minore di 6; ciò vuol dire che la cifra seguente della radice è zero (cioè la cifra delle unità della radice del numero 954 è zero, e quindi la radice del maggior quadrato contenuto in 954 è 30, ed il numero 54, che si è ottenuto abbassando le due cifre a fianco al resto zero, deve riguardarsi come l'avanzo che resta togliendo da 954 il quadrato di 30); perciò si porrà un zero a dritta della prima cifra 3 della radice; e poi a fianco al numero 54 si abbasserà la coppia seguente, e distaccando la cifra 1 dalla dritta del numero 5481 che ne risulta, nel numero 548 a sinistra sarà contenuto il prodotto del doppio delle 30 decine della radice per la cifra delle unità; dunque se dividiamo 548 pel doppio delle decine che è 60, il quoziente 9 sarà la cifra delle unità. E poichè moltiplicando 609 per 9, e togliendo il prodotto dal numero 5481 non si ottiene alcun resto, ne con-

9,54,81	309
0 548,1	609
	9

chiuderemo che 309 è la radice quadrata esatta del numero 95481.

315. Dal ragionamento fatto per estrarre la radice quadrata da un numero di 3, o 4 cifre, e di 5, o 6 cifre, si scorge che se un numero avesse più di 6 cifre, e non più di 8, si saprà estrarre dal medesimo la radice, perchè dipende da quella di un numero di 6 cifre; e se avesse 9, o 10 cifre anche si saprà estrarre, perchè dipende da quella di un numero di 8 cifre; e così seguitando si saprà sempre estrarre la radice quadrata da qualsivoglia numero intero, o esatta, o differente della vera *a meno di un' unità*, tenendo la seguente.

Regola. *Per estrarre la radice quadrata da un numero intero, convien separare le sue cifre a due a due, cominciando dalla dritta; perciò, quando il numero di esse è dispari, a sinistra vi sarà una sola cifra separata. Poi si estrarrà la radice quadrata dal maggior quadrato contenuto nella cifra a sinistra, o nel numero formato dalle due cifre separate a sinistra, e questa radice sarà la cifra a sinistra della radice cercata. Indi il quadrato di questa cifra si toglierà dalla cifra a sinistra del numero proposto, o dal numero formato delle due cifre separate a sinistra di esso, ed a dritta del resto si abbasserà la seguente coppia di cifre del numero proposto, e dal numero che ne risulta se ne distaccherà la cifra a dritta, e la parte a sinistra di esso si dividerà pel doppio della radice trovata; la cifra che si avrà per quoziente sarà la seconda cifra della radice cercata, purchè scritta a dritta del detto doppio e moltiplicata pel numero che n' emerge, il prodotto possa togliersi da quel numero che si è ottenuto abbassando la seguente coppia a fianco al resto, altrimenti bisogna diminuirla di tante unità finchè la sottrazione possa eseguirsi. Fatta la sottrazione, si abbasserà a dritta del resto la coppia seguente, e si proseguirà l' operazione con lo stesso metodo finchè non siansi abbassate tutte le coppie di cifre del numero proposto.*

Se poi abbassando una coppia di cifre, il numero che de-

ve dividersi pel doppio della radice risultasse minore di questo doppio, la seguente cifra della radice è zero; perciò si porrà uno zero nel luogo che deve occupar questa cifra, si abbasserà l'altra coppia, e si proseguirà l'operazione secondo abbiam detto.

Da questa regola si desume che la radice quadrata di un numero intero avrà tante cifre, quante sono le coppie in cui può dividersi il numero dato.

Estrazione della radice quadrata dai numeri per approssimazione espressa in decimali.

316. *Si aggiunge a dritta dell'intero un numero di zeri doppio di quante sono le cifre decimali che si vogliono nella radice, e dal numero che ne risulta si estrae la radice quadrata a meno di un'unità, ed infine da questa si separano le cifre decimali richieste.*

Sia p. e. il numero 85 da cui si vuole estrarre la radice quadrata a meno di 0,01 Siccome la radice deve esprimere 100^{mi},il quadrato deve rappresentare 10000^{mi}, perchè ha un doppio numero di cifre decimali di quanto ne ha la radice; perciò riduciamo il numero 85 in 10000^{mi} aggiungendovi quattro zeri a dritta, e dal numero 850000 diecimilesimi che ne risulta, considerato come intero, ne estragghiamo la radice a meno di un' unità, che si trova eguale 927. Infine da questa radice si separano due cifre decimali, e si avrà la radice cercata eguale a 9,27 a meno di 0,01; perchè se essa si aumenta di 0,01, il suo prodotto è maggiore di 850000 diecimilesimi.

317. *La radice quadrata da un decimale si estrae rendendo il numero delle cifre decimali doppio del numero delle cifre decimali che si vogliono nella radice; poi dal numero che ne risulta considerato come intero si ricava la radice quadrata a meno di un' unità; ed infine da questa si separano le cifre decimali richieste.*

Così volendosi estrarre la radice quadrata dal numero decimale 68,953, espressa in 100^{mi}, si pone un zero a dritta per rendere il numero delle sue cifre decimali doppio di quante se ne vogliono nella radice, e ciò perchè il numero delle cifre decimali del quadrato è doppio del numero delle cifre decimali della radice. Indi si estrae la radice quadrata del numero 68,9530 considerato come intero la quale è 830, e da essa si separano due cifre decimali, e così la radice cercata risulta eguale ad 8,30 a meno di 0,01, perchè se si prendesse 8.31 il suo quadrato sarebbe maggiore di 68,9530.

318. *Da una frazione ordinaria si estrae la radice quadrata espressa in decimali, riducendo la frazione ordinaria in decimale con un numero di cifre decimali doppio di quante se ne vogliono nella radice; e poi si estrae la radice quadrata dal numero decimale che ne risulta.*

Sia la frazione ordinaria $^7/_{13}$ da cui si voglia estrarre la radice quadrata espressa in 100^{mi} con l'errore minore di 0,01. Riduciamo la frazione data in 10000^{mi} affinchè il numero delle sue cifre decimali sia doppio del numero delle cifre decimali che si vogliono nella radice; e ne risulta la frazione decimale 0,5384 differente dalla data per meno di 0,0001. Estragghiamo la radice quadrata del numero 5384 a meno di un' unità, e viene eguale a 73; infine separiamo da questa due cifre decimali e si avrà la radice quadrata della frazione proposta eguale a 0,73, erronea a meno di 0,01; perchè se si prendesse 0,74 il suo quadrato sarebbe almeno 0,5384, e quindi maggiore della frazione proposta.

319. *La radice quadrata a meno di un' unità da un numero frazionario si ottiene estraendola a meno di un' unità dall' intero contenuto in esso.*

Sia p. e. il numero frazionario 54 $^3/_8$. Esso è compreso fra due interi quadrati perfetti consecutivi, uno minore e l'altro maggiore del numero frazionario, le cui radici differiscono perciò di un' unità: quindi la sua radice è compresa

fra le radici di questi numeri interi, e differisce da una di esse per meno di un' unità ; laonde, se si estrae la radice quadrata a meno di un' unità dall' intero 54 contenuto nel numero frazionario, la quale si trova eguale a 7, questa sarà anche quella del numero frazionario, e ne differisce per meno di un' unità.

ESTRAZIONE DELLA RADICE QUADRATA DA UNA FRAZIONE ORDINARIA.

320. *La radice di una frazione è una nuova frazione che ha per numeratore la radice del numeratore, e per denominatore la radice del denominatore; perchè questa frazione moltiplicata per sè stessa produce la proposta.*

Per avere esatta la radice del denominatore, esso si rende quadrato perfetto moltiplicando ambedue i termini della frazione pel denominatore così la frazione non si altera ; ed allora si estrae la radice dal solo numeratore, perchè quella del denominatore è lo stesso denominatore primitivo. E se la radice del numeratore si trova a meno di un' unità, quella della frazione sarà approssimata a meno di una parte dell' unità indicata dal dato denominatore.

Sia p. e. da estrarsi la radice quadrata dalla frazione $^3/_7$. Moltiplichiamo i due termini pel denominatore 7, e si riduce ad estrarre la radice dalla frazione $^{21}/_{49}$, il cui denominatore è quadrato perfetto di 7 ; ed estraendo la radice a meno di un' unità da 21, siccome essa è 4, quella delle frazione proposta è compresa fra $^4/_7$ e $^5/_7$; perciò prendendo $^4/_7$, si ha la radice della frazione a meno di $^1/_7$ dell' unità.

ESTRAZIONE DELLA RADICE QUADRATA CON UN APPROSOIMAZIONE INDICATA DA UN QUALUNQUE NUMERO INTERO N.

321. *Si moltiplica il numero proposto pel quadrato del numero* n, *poi dal prodotto si estrae la radice quadrata a meno di un' unità, ed infine questa radice si divide per* n, *e si avrà la radice cercata.*

Sia a il numero da cui voglia estrarsi la radice quadrata a meno di $^1/n$. Moltiplichiamo e dividiamo a per n^2; ne verrà la frazione $\frac{an^2}{n^2}$ eguale ad a. Estragghiamo la radice quadrata dal numeratore e dal denominatore, così la radice quadrata di a viene eguale a $\frac{\sqrt{an^2}}{n}$;

e perciò se si estrae la radice dal prodotto an^2 a meno di un' unità, e poi si divide per n, si avrà la radice cercata a meno di $^1/n$ dell' unità.

Così p. e. se la radice di an^2 è compresa fra 35 e 36, la radice cercata è compresa fra $^{35}/n$ e $^{36}/n$; e quindi differisce dalla vera per meno della parte n^{esima} dell' unità.

Applichiamo ciò che si è detto ai due seguenti esempi.

Sia da estrarsi la radice quadrata da 7 a meno di $^1/_{94}$. Moltiplichiamo 7 pel quadrato di 94, cioè per 8836, ed estragghiamo la radice a meno di un' unità dal prodotto 61852, la quale si trova essere 248; perciò la radice cercata è compresa fra $^{248}/_{94}$ e $^{249}/_{94}$, ossia fra 2 $^{60}/_{94}$ e 2 $^{61}/_{94}$; quindi uno di questi due numeri rappresenta la radice quadrata di 7 a meno di un 94^{esimo} dell' unità.

Sia ora da estrarsi la radice quadrata dalle frazioni $^8/_{13}$ a meno di $^1/_{60}$ dell' unità. Moltiplichiamo la frazione pel quadrato di 60, e ne viene la frazione $\frac{28800}{13}$. Estragghiamo ora la radice da questa frazione a meno di un' unità, e perciò basta estrarla a meno di un' unità, dall' intero contenuto in essa (319), cioè da 2215, e si trova eguale a 47; infine dividiamo questa radice per 60, e si avrà che la radice della data frazione a meno di $^1/_{60}$ è compresa fra $^{47}/_{60}$ e $^{48}/_{60}$.

322. Dalle cose precedenti si desume che la radice quadrata di un numero intero, allorchè non può ottenersi esattamente in numeri interi, si può trovare con un' approssimazione minore di $^1/_{10}$, di $^1/_{100}$, di $^1/_{1000}$, ec.; perchè si possono trovare due numeri fra quali essa è compresa differenti fra loro per una quantità minore di qualunque data. Così p. e. volendo la radice di 5 con un errore minore di un milionesimo dell' unità, si spingerà l'estrazione della radice sino ai milionesimi, e si troverà che essa è compresa fra 2,236067 e 2,236068, cioè fra due numeri che differisco-

no fra loro per un milionesimo ; e quindi se uno di questi numeri si prende per radice quadrata di 5, essa è erronea a meno di un milionesimo, la prima per eccesso , la seconda per difetto.

Ma non bisogna credere che aumentando il numero delle cifre decimali della radice, la medesima possa infine ottenersi esattamente ; ne tampoco bisogna credere che possa essere espressa da un numero frazionario che non sia decimale , essendo impossibile di poter esprimersi nell' uno e nell' altro modo, come or ora passiamo a vedere.

323. *Un numero intero che non ha radice espressa da un numero intero, non l' avrà nè anche espressa da un numero frazionario.*

Supponiamo che un numero intero che non ha radice quadrata espressa da un numero intero, possa averla espressa da un numero frazionario $\frac{a}{b}$, che supponiamo ridotto a minimi termini, e perciò a e b non hanno fattor comune; allora il quadrato $\frac{a^2}{b^2}$ di questo numero frazionario è uguale al dato numero intero, e quindi b^2 deve dividere esattamente a^2; e perciò ogni fattore primo di b^2 deve anche dividere esattamente a^2 ; ma quando un fattore primo divide la potenza di un numero deve pure dividere questo numero (106), dunque il fattore primo di b^2 deve dividere a e b; quindi a e b avrebbero un fattor comune , il che è assurdo; dunque è pure assurdo che un numero intero che non ha radice espressa da un intero possa averla espressa da un numero frazionario.

La stessa dimostrazione può farsi per una radice di qualunque grado.

324. Si dice *commensurabile o razionale* un numero il cui valore si conosce esattamente, o si può esattamente trovare.

Digitized by Google

Un numero il cui valore non può esattamente conoscersi, si dice *incommensurabile* o *irrazionale*; perchè non vi è misura comune fra esso e l'unità, e quindi non può esprimersi la ragione che esso serba all' unità.

La radice quadrata di un numero intero non quadrato perfetto è incommensurabile; non potendosi trovare nè anche una parte picciolissima dell'unità che misuri esattamente la detta radice quadrata; difatti, se si potesse trovare questa parte dell'unità, supponiamo che essa sia la parte millesima, e che sia contenuta 13 volte esattamente nella radice quadrata; allora questa radice sarebbe eguale a $^{13}/_{1000}$; perciò sarebbe espressa da una frazione, il che è assurdo.

Lo stesso si dirà delle radici terze, quarte, quinte, ec. dei numeri che non sono potenze esatte.

Facciamo notare che quantunque il rapporto di un numero irrazionale ad un numero razionale non possa esattamente esprimersi; pure può avvenire che il rapporto fra due numeri irrazionali, sia espresso esattamente. In effetti, se moltiplichiamo un numero irrazionale per un qualunque numero razionale, il rapporto del numero irrazionale al prodotto, il quale è pure un numero irrazionale, è commensurabile. Così p. e. $\sqrt{2}$ serba un rapporto commensurabile al prodotto $3\sqrt{2}$, ossia a $\sqrt{9\times2}$, ossia a $\sqrt{18}$; e si ha $\sqrt{2} : \sqrt{18} :: 1 : 3 = {}^1/_3$.

COMPOSIZIONE DEL CUBO DI UN NUMERO.

325. *Se un numero è diviso in due parti, il suo cubo è uguale al cubo della prima parte, più il triplo quadrato della prima moltiplicato per la seconda, più il triplo quadrato della seconda moltiplicato per la prima, più il cubo della seconda parte.*

Sia p. e. il numero 47 diviso nelle due parti 40 e 7.

Dico che si avrà

$$47^3 = 40^3 + 3\times40^2\times7 + 3\times7^2\times40 + 7^3.$$

Difatti, per avere il cubo di 40+7 dobbiamo moltiplicare 40+7 due volte per sè stesso. Moltiplichiamo prima 40+7

per $40+7$, e si avrà per prodotto $40^2+40\times7+40\times7+7^2$; moltiplichiamo poi questo prodotto per $40+7$, e si otterrà $40^3+40^2\times7+40^2\times7+40\times7^2+40^2\times7+40\times7^2+40\times7^2+7^3$; ma poichè in questo prodotto è ripetuta tre volte la parte $40^2\times7$, e la parte 40×7^2, esso si riduce a quello enunciato, che è, $\quad 4^3+3\times40^2\times7+3\times40\times7^2+7^3$.

Da qui si rileva che, se un numero contiene decine ed unità, il suo cubo si compone dal cubo delle decine, dal triplo quadrato delle decine moltiplicato per le unità, dal triplo quadrato delle unità moltiplicato per le decine, e dal cubo delle unità.

326. Analogamente a quel che dicemmo per i quadrati dei numeri, convien osservare che non tutt' i numeri sono cubi perfetti. Così p. e. 27 essendo il cubo di 3, e 64 il cubo di 4, fra 27 e 64 esistono 35 numeri interi non cubi perfetti. Ed a misura che due numeri interi consecutivi sono di più in più grandi, cresce la differenza fra i loro cubi sino a divenir grandissima, ed anche maggiore di qualunque numero dato. Ci convinceremo di questa verità dando un'occhiata ai cubi dei dieci primi numeri, che abbiamo scritti qui appresso in corrispondenza delle loro radici,

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10
1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000.

Inoltre osserviamo che come avviene per i quadrati le differenze fra i cubi dei numeri interi consecutivi sono numeri dispari, i quali sebbene non sieno numeri dispari successivi, come succede per i quadrati, pure si passa da una differenza ad un altra con una certa legge; perchè, considerando tre numeri consecutivi, alla differenza fra i cubi del numero minore e dell' intermedio bisogna aggiungere il sestuplo del numero intermedio per avere la differenza fra i cubi del numero maggiore e dell' intermedio. Così p. e. le differenze fra i cubi de' numeri 2, 3, 4 sono i nume-

Digitized by Google

ri 19 e 37, e 19 differisce da 37 per 6 volte il numero intermedio 3.

Difatti, indicando con a un qualunque numero intero, il consecutivo essendo $a+1$, il suo cubo sarà a^3+3a^2+3a+1 che differisce dal cubo di a per $3a^2+3a+1$, ossia per $3a\times(a+1)+1$: quindi *la differenza tra i cubi di due numeri interi successivi è uguale al triplo prodotto di essi numeri accresciuto dell' unità.* Questa differenza è dispari, perchè se a è pari, $3a$ sarà pure pari, ed il prodotto di $3a$ per $a+1$ sarà anche pari, ed aggiungendovi l'unità, il numero che ne risulta sarà dispari. Se poi a è dispari, $a+1$ è pari, e moltiplicato per $3a$ darà un prodotto anche pari, a cui aggiunta l' unità, il risultato sarà dispari. Or poichè si è veduto che la differenza fra il cubo di a ed il cubo di $a+1$ è $3a\times(a+1)+1$, quella fra la differenza de' cubi di a ed $a+1$ è la differenza de' cubi di $a+1$ ed $a+2$ sarà $3\times(a+1)(a+2)+1-3a\times(a+1)-1$, ossia $3\times(a+1)(a+2-a)=3\times(a+1)2=6(a+1)$; cioè, *la differenza tra le differenze de' cubi di tre numeri interi consecutivi è sestupla del numero intermedio.*

Si può osservare che i cubi de' nove primi numeri terminano con le stesse cifre, e solo vi è un' inversione relativamente a' numeri 2 e 8, ed a' numeri 3 e 7 equidistanti dagli estremi; terminando con 8 il cubo di 2, e con 2 quello di 8, e lo stesso avviene per 3 e 7. Or poichè il cubo di un numero termina come termina quello della sua cifra a dritta, ne segue che la cifra a dritta di un numero che è cubo perfetto è la stessa che quella a dritta della sua radice, salvo se la detta cifra sia 2, 3, 7, 8, perchè allora quella a dritta della radice sarà rispettivamente 8, 7, 3, 2.

Digitized by Google

ESTRAZIONE DELLA RADICE CUBICA DA' NUMERI.

327. Primieramente il numero da cui vogliasi estrarre la radice cubica non abbia più di sei cifre, e sia il numero 83453.

Or poichè la radice cubica di 1000 ha due cifre, il numero proposto essendo maggiore di 1000 la radice cubica contiene decine ed unità; quindi nel proposto numero sarà contenuto il cubo delle decine della radice, più il triplo quadrato delle decine per le unità, più il triplo quadrato delle unità moltiplicato per le decine, più il cubo delle unità; ma il cubo delle decine non ha cifre significative di ordine inferiore alla migliaia, perchè tiene tre zeri a dritta, dunque se distacchiamo tre cifre dalla dritta del numero proposto, nel numero 83 a sinistra sarà contenuto il cubo delle decine della radice, quindi estraendo la radice cubica dal massimo cubo contenuto in 83, il quale è 64, si avranno le decine della radice che sono 4; difatti, non possono essere più di 4, perchè se fossero 5, il cubo di 5 decine che è 125 migliaia non è contenuto nella migliaia del numero proposto che sono 83.

Scriviamo dunque a dritta del numero proposto le 4 decine della radice, intavolando l'operazione come qui appresso.

```
83,453 | 43      124     123
       |----       4       3
64     | 48     -----   -----
------ |          496     369
194,53 |         48      48
155,07 |        -----   -----
------ |         5296    5169
 39 46 |            4       3
       |        -----   -----
       |        21184   15507
```

Ora se togliamo da 83 il cubo delle 4 decine, ed accanto la resto 19 abbassiamo le tre cifre che avevamo distaccate, nel numero 19453 che ne risulta sarà contenuto il prodotto del triplo quadrato delle decine per le unità, più il triplo quadrato delle unità moltiplicato per le decine, più il cubo delle unità; ma il prodotto del triplo quadrato delle decine per le unità non ha cifre significative di ordine inferiore alle centinaia, dunque distaccando due cifre dalla dritta del numero 19453, nel numero 194 a sinistra sarà contenuto il prodotto del triplo qua-

drato delle decine per le unità; perciò se dividiamo 194 per 48 che è il triplo quadrato delle decine, il quoziente 4 che si ottiene sarà la cifra delle unità; ma, per assicurarsi se questa cifra sia giusta o troppo grande, bisogna completare il cubo di 44 facendone le altre parti, che sono il prodotto del triplo quadrato delle decine per le unità, quello del triplo delle decine pel quadrato delle unità, ed il cubo delle unità, e poi si osserverà se la loro somma risulta maggiore eguale o minore del numero 19453, e se risulta maggiore, bisogna diminuire la detta cifra successivamente di tante unità finchè divenga minore del detto numero.

La somma di queste tre parti si può ottenere con una certa semplicità, perchè essa è uguale a $4800\times4+120\times4^2+4^3$ $=4800\times4+(120+4)\times4^2=(124\times4+4800)\times4$; quindi le altre parti del cubo di 44 si ottengono scrivendo la cifra 4 delle unità affianco a 12 che è il triplo delle decine, e moltiplicando il numero 124 che ne risulta per la stessa cifra 4 delle unità, ed aggiungendo al prodotto il triplo quadrato delle decine che è 4800, e moltiplicando la somma 5296 anche per la cifra 4 delle unità.

Ciò fatto, siccome si ottiene per risultato 21184 che è maggioge di 19453, la cifra 4 è troppo grande, perciò si prende 3, e fatto rispetto a 3 lo stesso calcolo che si è fatto rispetto a 4, si trova per risultato il numero 15507 che è minore di 19453, quindi 3 è la cifra delle unità. Ora togliendo 15507 da 19453, si finisce così di togliere dal numero proposto il cubo di 43, e poichè si ottiene per resto 3946, ne conchiuderemo che il numero proposto non e cubo perfetto, e quindi 43 è la radice del maggior cubo contenuto in 83453, e questo numero supera di 3946 il cubo di 43.

328. Se poi dovesse estrarsi la radice cubica da un numero maggiore di sei cifre, ma che non abbia più di nove, come è p. e. il numero 189119224, si ragionerebbe similmente, cioè si dirà:

Il numero proposto essendo maggiore di 1000, la sua radice cubica conterrà decine ed unità, perciò distaccando tre cifre dalla dritta del numero proposto, nel numero 189119 a sinistra sarà contenuto il cubo delle decine della radice, adunque per trovar queste decine bisogna estrarre la radice cubica del numero 189119; ma questo numero avendo sei cifre sappiamo estrarne la radice cubica, il che effettuandosi come si vede qui appresso, troveremo che essa è 57.

189,119,224	574	158	157	57	1714
125	75	8	7	57	4
641,19		1264	1099	399	6856
601 93		75	75	285	9747
39 262,24		8764	8599	3249	981556
		8	7	3	4
		70112	60193	9747	3926224

Ora togliendo il cubo di 57 dal 189119, ed ottenendosi per resto 3926, se abbassiamo a dritta di questo resto le tre cifre che eransi distaccate, nel numero 3926224 che ne risulta sarà contenuto il prodotto del triplo quadrato delle decine per la cifra delle unità più il triplo quadrato delle unità moltiplicato per le decine, più il cubo delle unità, ma il primo prodotto è contenuto nelle centinaia, perciò separando due cifre dalla dritta del numero 3926224, nel numero 39262 a sinistra sarà contenuto il prodotto del triplo quadrato delle decine per la cifra delle unità; adunque se dividiamo il numero 39262 per 9747 che è il triplo quadrato delle 57 decine, il quoziente 4 che si ottiene sarà la cifra delle unità, la quale bisognerà verificare se sia giusta completando il cubo di 574 facendone le altre tre parti, e vedendo se la loro somma risulti maggiore eguale o minore di 3926224, e poichè risulta eguale a questo numero, ne conchiuderemo che i numero 574 è la radice cubica esatta del numero 189119224.

Similmente si ragionerebbe per estrarre la radice cubica da un numero che abbia più di nove cifre, ed è facile scorgere che il numero proposto si dividerà in gruppi di cifre a

Digitized by Google

tre a tre cominciando da dritta, e perciò il primo gruppo a sinistra può venire di due o di una sola cifra. Inoltre si vede che, analogamente a quel che fu detto per la radice quadrata, se nel corso dell' operazione avvenisse che dopo aver abbassato affianco ad un resto il gruppo seguente, e dopo aver separate due cifre dalla dritta dal numero che n'emerge, il numero a sinistra fosse minore di quello per cui deve dividersi, cioè del triplo quadrato della radice trovata , allora la seguente cifra della radice sarà zero,perciò bisognerà porre prima un zero a dritta della detta radice, e poi si abbasserà l' altro gruppo che viene appresso, e si proseguirà l' operazione. Da qui si desume la seguente.

Regola. Per estrarre la radice cubica da un numero intero, si separano a tre a tre le sue cifre cominciando dalla dritta , perciò il primo gruppo a sinistra potrà avere due cifre ed anche una sola. Poi si estrarrà la radice cubica dal maggior cubo contenuto nel primo gruppo a sinistra, e questa radice sarà la cifra a sinistra della radice cercata. Indi il cubo di questa cifra si toglierà dal numero rappresentato dal primo gruppo a sinistra, ed a dritta del resto si abbasserà il gruppo seguente, e dalla dritta del numero che n' emerge si separeranno due cifre , ed il numero a sinistra si dividerà pel triplo quadrato della radice trovata ; la cifra che si avrà per quoziente sarà la seconda cifra della radice cercata, purchè facendosi le altreparti del cubo della radice trovata la loro somma possa togliersi dal numero che si è ottenuto con abbassare il gruppo affiancò al resto; altrimenti la predetta cifra si diminuirà di tante unità finchè la sottrazione possa eseguirsi. Fatta la sottrazione , si abbasserà a dritta del resto l' altro gruppo che segue, e dalla dritta del numero che ne nasce si separeranno due cifre , ed il numero a sinistra si dividerà pel triplo quadrato della radice trovata, e si proseguirà l' operazione con lo stesso metodo, finchè siansi abbassati tutti i gruppi del numero proposto. Se poi abbassando un gruppo , il numero che deve dividersi pel triplo quadrato della radice tro-

vata risulta minore di questo triplo, la seguente cifra della radice sarà zero; perciò si porrà la cifra zero in suo luogo, e si abbasserà l' altro gruppo che viene appresso; e si proseguirà l' operazione come abbiam detto di sopra.

ESTRAZIONE DELLA RADICE CUBICA DAI NUMERI PER APPROSSIMAZIONE ESPRESSA IN DECIMALI.

329. *Si aggiunge a dritta dell' intero un numero di zeri triplo di quante sono le cifre decimali che si vogliono nella radice, e dal numero che ne risulta si estrae la radice cubica a meno di un' unità, ed infine da questa si separano le cifre decimali richieste.*

Sia p. e. da estrarsi la radice cubica da 9 a meno di 0,001. Siccome la radice deve esprimere 1000^{mi} il suo cubo deve rappresentare bilionesimi; perchè deve avere un numero di cifre decimali triplo di quante ne ha la radice; perciò aggiungiamo tre terni di zeri a dritta di 9 per ridurlo in bilionesimi, e dal numero 9000000000 che ne risulta estragghiamo la radice a meno di un' unità, che si trova eguale a 2080; Infine da questa si separano tre cifre decimali, e si avrà la radice cubica di 2 eguale a 2,080 a meno di 0,001, perchè se si aumenta di 0,001, il suo cubo risulta maggiore di 9000000000 bilionesimi.

330. *La radice cubica da un decimale si estrae rendendo il numero delle cifre decimali triplo di quelle che si vogliono nella radice; e poi dal numero che ne risulta considerato come intero si ricava la radice cubica a meno di un'unità; ed infine da questa si separano le cifre decimali richieste.*

Così volendosi estrarre la radice cubica da 5,34 a meno di 0,01, si ridurranno a sei le sue cifre decimali aggiungendovi quattro zeri a dritta, e poi si estrae la radice cubica a meno di un'unità dal numero 5,340000 che ne risulta, la quale si trova eguale a 174, da cui si separano due decimali, e si avrà la radice cercata eguale a 1,74 a meno di 0,01, perchè se si prendesse 1,75 il suo cubo è maggiore di 5,340000.

331. *Da una frazione ordinaria si estrae la radice cubica espressa in decimali, riducendo la frazione ordinaria in decimale con un numero di cifre decimali triplo di quante se ne vogliono nella radice, e poi si estrae la radice cubica dal numero decimale che ne risulta.*

Sia la frazione $^2/_5$ da cui voglia estrarsi la radice cubica a meno di 0,001. Riduciamo la frazione data in bilionesimi affinchè il numero delle cifre decimali fosse triplo di quante se ne vogliono nella radice; essa viene eguale a 0,400000000. Estragghiamo ora da questo numero considerato come intero la radice cubica a meno di un'unità, e viene eguale a 736, da cui separando tre decimali, si avrà la radice cubica di $^2/_5$ eguale a 0,736 approssimata a meno di 0,001, perchè se si prendesse 0,737, il suo cubo sarebbe maggiore di 0,4000000000.

332. *La radice cubica di un numero frazionario a meno di un' unità, si ottiene estraendola a meno di un' unità dall' intero contenuto in esso.*

La dimostrazione è come quella fatta per la radice quadrata.

333. *La radice cubica di una frazione è una nuova frazione che ha per numeratore la radice cuba del numeratore, e per denominatore la radice cuba del denominatore.*

Per avere esatta la radice del denominatore esso si rende cubo perfetto moltiplicando i termini della frazione pel quadrato del denominatore; e poi si estrae la radice cuba dal solo numeratore, perchè quella del denominatore è lo stesso denominatore primitivo; e se la radice del numeratore si trova a meno di un' unità, quella della frazione sarà approssimata a meno di una parte dall' unità indicata dal suo denominatore.

Sia p. e. la frazione $^2/_7$ da cui voglia estrarsi la radice cubica. Moltiplichiamo i termini pel quadrato del denominatore, che è 49, e si riduce ad estrarre la radice cubica da $^{98}/_{343}$; e siccome la radice cubica del numeratore a meno di un' unità è 4, quella della frazione è $^4/_7$, approssimata a meno di $^1/_7$, perchè è compresa fra $^4/_7$ e $^5/_7$.

334. La radice cubica di un numero a meno di una parte n^{esima} dell'unità si ottiene moltiplicando il numero pel cubo di n; e poi si estrae la radice cubica a meno di un' unità dal prodotto, ed infine questa si divide per n; ed il quoto esprime la radice cubica a meno di una parte n^{esima} dell' unità.

Il ragionamento è analogo a quello fatto per la radice quadrata.

335. Le radici cube dei numeri interi non cubi perfetti, ovvero dei numeri frazionari che non hanno il numeratore ed il denominatore cubo perfetto, sono incommensurabili, come risulta dalla dimostrazione generale fatta nel n.º 323.

Maniera di scrivere i numeri degli antichi romani.

Le cifre adoperate per rappresentare i numeri diconsi *cifre arabe*, perchè gli arabi ne furono gl' inventori. Gli antichi romani per indicare i numeri facevano uso delle lettere dell'alfabeto che veggonsi scritte qui appresso sul numero da ciascuna rappresentato.

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000.

Due I rappresentano il numero 2, tre I il numero 3. Un I posto a sinistra di V o di X fa diminuire questi numeri di un'unità; ed uno, due, o tre I posti a dritta di V o di X fanno aumentare questi numeri di uno, di due, o di tre unità. Perciò i seguenti numeri scritti in cifre romane equivalgono a quelli scritti al di sotto in cifre *arabe*.

II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13.

L' X messo a dritta o a sinistra di L o di C, nel primo caso fa accrescere, e nel secondo fa diminuire questi numeri di una decina; perciò sono eguali i seguenti numeri scritti in corrispondenza uno sotto l'altro

XL	L	LX	LXX	LXXX	XC	CX	CXX	CXXX
40	50	60	70	80	90	110	120	130

I numeri contenenti decine ed unità si rappresentavano scrivendo quello dinotante le unità a dritta di quello dinotante le decine, come sono p. e. i numeri scritti qui sotto in corrispondenza dei romani.

XI	XIV	XVII	XXXV	XLIX	LXIII	XCIV
11	14	17	35	49	63	94.

Ecco qui appresso altri numeri in corrispondenza:

CC	CCC	CCCC	MM	MMM	MMMM	IↃ	CIↃ	IↃↃ	CCIↃↃ	CCCIↃↃↃ
200	300	400	2000	3000	4000	500	1000	5000	10000	100000.

Quindi si rileva che lo stesso numero, p. e. 1848, può esser rappresentato da MDCCCXLVIII e da CIↃIↃCCCXLVIII. Ciò perchè le lettere M e D furono introdotte dopo per brevità.

FINE.

Digitized by Google

INDICE

Digitized by Google

Pag.	Riga	Errori	Correzioni
55	21	moltiplicato per	moltiplicato una o più volte per
112	14	*Manca la regola della divisione degl'interi uniti a frazioni, la quale è simile a quella del n.º 158, adattandola alla divisione.*	
114	12	dei problemi	di problemi
141	19	441	291
141	21 e 22	2187	2040
263	24	111,65	1015,651
181	24	inferiori	superiori
245	18	prodotto	quadrato
245	23	di a^2 e di b^2	di b^2

SBN 609791